*Université Paris I, Panthéon - Sorbonne*

**Licence M.A.S.S. deuxième année** 2012 – 2013

# Algèbre S4

## Examen de seconde session, juin 2013

*Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.*

1. **(8 points)** Soit $a \in \mathbf{R}$ et $f_a$ la fonction telle que $f_a(x) = |a + \cos(x)|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.
   (a) Pour $a = 1/2$, tracer le graphe de la fonction $f_a$ sur $[-\pi, \pi]$ **(1 pt)**.
   (b) Si $|a| \geq 1$, donner (en justifiant) le développement en série de Fourier de $f_a$ **(2 pts)**.
   (c) Si $a = 0$, déterminer les coefficients de Fourier de $f_0$ **(3 pts)** (on pourra considérer les cas où $n$ est pair et les cas où $n$ est impair). En déduire le développement en série de Fourier de $f_0$ (en justifiant) **(1 pt)**. En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2-1}$ **(1 pt)**.

2. **(9 points)** Soit $E = \mathbf{R}^2$ et $a \in \mathbf{R}$. Pour $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in E$, on note:
$$\phi_a(x, y) = 3(x_1y_1 + x_2y_2) + (2a - 1)(x_1y_2 + y_1x_2).$$
   (a) Démontrer que $\phi_a$ est une forme bilinéaire symétrique et donner sa matrice dans la base canonique de $E$ **(1 pt)**.
   (b) Déterminer $\Psi_a$ la forme quadratique sur $E$ associée à $\phi_a$ **(0.5 pts)**.
   (c) Déterminer la signature de $\Psi_a$ en fonction de $a$ **(2 pts)**.
   (d) Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée à $\Phi_a$ est un produit scalaire quand $-1 < a < 2$ **(0.5 pts)**.
   (e) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de $\Psi_a$ en fonction de $a$ **(2 pts)**.
   (f) Soit $B = \{x = (x_1, x_2) \in E,\ x_1 + x_2 \leq 1\}$. $B$ est-il un espace vectoriel **(1 pt)**? Lorsque $\phi_a$ est un produit scalaire, déterminer $B^{\perp}$ (où l'orthogonalité est liée à $\phi_a$) **(2 pts)**.

3. **(8 points)** Soit $E = \{f : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R},\ f$ continue sur $\mathbf{R}_+,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe$\}$ (la notion de limite s'entend ici comme une limite dans $]-\infty, \infty[$, l'infini étant exclus).
   (a) Montrer que $E$ est un espace vectoriel **(1 pt)**.
   (b) Montrer que l'application $g :\ f \in E \mapsto \lim_{x\to+\infty} f(x)$ est une forme linéaire sur $E$ **(1 pts)**.
   (c) On considère l'application $< \cdot, \cdot >$ telle que pour tout $(f_1, f_2) \in E^2, < f_1, f_2 >= \int_0^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-t}dt$. Montrer que $< f_1, f_2 >$ existe pour tout $(f_1, f_2) \in E^2$ **(2 pts)**. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur $E$ **(1 pt)**.
   (d) On veut montrer que la représentation de Riesz de $g$ n'est pas possible sur $E$. Supposons qu'il existe $f_0 \in E$ tel que pour pour tout $f \in E$, $g(f) =< f, f_0 >$. En appliquant également cette égalité à $f(x) + f_0(x)e^{-x}$ montrer que l'on aboutit à une contradiction **(3 pts)**.