Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 – 2010

Algèbre S4

Examen final, juin 2010

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(8 pts)** Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien et soit $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel constitué par les applications linéaires de E dans E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit ϕ l'application telle que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\phi(x,y) =< u(x), u(y) >$. Dans la suite on notera u^* l'application linéaire adjointe de u.

   (a) Dans le cas particulier où $u(x) = \lambda\, x$ pour tout $x \in E$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$, l'application ϕ est-elle un produit scalaire sur E?

   (b) Dans le cas particulier où u est un projecteur sur un sous-espace vectoriel non égal à E, montrer que ϕ n'est pas un produit scalaire sur E.

   (c) On revient au cas général pour u. Montrer qu'il existe une unique application $v \in \mathcal{L}(E)$ (que l'on précisera) telle que $\phi(x,y) =< x, v(y) >$. Montrer que $v = v^*$ et en déduire que ϕ est une forme bilinéaire symétrique.

   (d) Montrer que Φ, forme quadratique associée à ϕ, est toujours positive.

   (e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que Φ soit définie positive.

   (f) On fixe $(x_0, y_0) \in E^2$. On considère l'application $h : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto < u(x_0), u(y_0) >$. Montrer que h n'est pas une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

2. **(5 pts)** Soit $E = \mathbf{R}^3$ et $a \in \mathbf{R}$. Pour $(x,y,z) \in E$, on pose

$$\Phi(x,y,z) = (2-a)^2x^2 + 4(1-a)y^2 + 13z^2 + 8(1-a)xy - 2axz.$$

   (a) Expliquer pourquoi Φ est bien une forme quadratique sur E.

   (b) Déterminer la matrice associée à Φ dans la base canonique de E.

   (c) Déterminer, suivant a, la signature de Φ.

   (d) Pour quelles valeurs de a, Φ peut-elle s'écrire comme le carré d'une norme?

3. **(13 pts + 3 pts)** Soit $E = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f$ continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt < \infty\}$.

   (a) Déterminer une fonction non nulle et continue appartenant à E.

   (b) Montrer que E est un espace vectoriel.

   (c) Pour $f, g \in E$, on pose $< f, g >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt$. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est une forme bilinéaire symetrique sur E et que sa forme quadratique associée est positive. On notera désormais $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$.

(d) Soit $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction telle que $\psi(x) = 1$ quand $x \in]0, 1/2[$, $\psi(x) = -1$ quand $x \in]1/2, 1[$ et $\psi(x) = 0$ sinon. Montrer que $\psi \in E$. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt$ et $\|\psi\|$.

(e) Pour $j \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{Z}$, on note $\psi_{j,k}$ la fonction telle que $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(\frac{x}{2^j} - k)$. Déterminer $\|\psi_{j,k}\|$.

(f) Montrer que pour tout $j \in \mathbf{Z}$, $\psi_{j,k}\psi_{j,k'} = 0$ pour $k \neq k'$.

(g) Soit $j' > j$ avec $(j, j') \in \mathbf{Z}$. Montrer que $\psi_{j,k}\psi_{j',k'} = \begin{cases} 2^{-\frac{j'}{2}}\psi_{j,k} & \text{quand } 2^{j'-j}k' = k \\ -2^{-\frac{j'}{2}}\psi_{j,k} & \text{quand } 2^{j'-j}(k'+1) = k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

(h) Déduire de (f) et (g) que $(\psi_{j,k})_{j\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z}}$ est une famille $< ., . >$-orthonormale de E.

(i) Soit F_N le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(\psi_{j,k})_{-N\leq j\leq N, -N\leq k\leq N}$ où $N \in \mathbf{N}$. Déterminer $\dim F_N$. Pour $f \in E$, rappeler l'expression de $p_{F_N}(f)$ la projection orthogonale de f sur F_N.

(j) **(Question facultative 3 pts)** On admettra que pour $f \in E$, $f = \lim_{N\to\infty} p_{F_N}(f)$. Soit la fonction $f(x) = x^2$ lorsque $x \in [-1, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon. Calculer $< f, \psi_{j,k} >$ pour tous $j \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{Z}$ et en déduire $\lim_{N\to\infty} p_{F_N}(f)$.