Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 – 2010

Algèbre S4

Examen final, juin 2010

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(8 pts)** Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien et soit $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel constitué par les applications linéaires de E dans E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit ϕ l'application telle que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\phi(x, y) =< u(x), u(y) >$. Dans la suite on notera u^* l'application linéaire adjointe de u.

   (a) Dans le cas particulier où $u(x) = \lambda\, x$ pour tout $x \in E$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$, l'application ϕ est-elle un produit scalaire sur E?

   (b) Dans le cas particulier où u est un projecteur sur un sous-espace vectoriel non égal à E, montrer que ϕ n'est pas un produit scalaire sur E.

   (c) On revient au cas général pour u. Montrer qu'il existe une unique application $v \in \mathcal{L}(E)$ (que l'on précisera) telle que $\phi(x, y) =< x, v(y) >$. Montrer que $v = v^*$ et en déduire que ϕ est une forme bilinéaire symétrique.

   (d) Montrer que Φ, forme quadratique associée à ϕ, est toujours positive.

   (e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que Φ soit définie positive.

   (f) On fixe $(x_0, y_0) \in E^2$. On considère l'application $h : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto < u(x_0), u(y_0) >$. Montrer que h n'est pas une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Proof. (a) On a $\phi(x, y) = \lambda^2 < x, y >$ donc si $\lambda = 0$, ϕ n'est pas un produit scalaire (car $\phi(x, x) = 0$ n'entraîne pas forcément $x = 0$) et si $\lambda \neq 0$, c'est un produit scalaire (évident) **(1pt)**.
(b) Si $x \in F^{\perp}$ et $x \neq 0$ (existe puisque $E \neq F$), alors $\phi(x, x) = 0$ donc $\phi(x, x)$ est forme quadratique positive mais non définie: ϕ n'est pas un produit scalaire **(1.5pts)**.
(c) Par définition, $\phi(x, y) =< x, u^*(u(y)) >$ pour tout $x, y \in E$. Ainsi v existe et $v = u^*_O u$ donc v unique (en effet si $< x, u^*(u(y)) >=< x, v(y) >$ pour tout $x, y \in E$, soit $< x, (u^*_O u - v)(y) >= 0$ en prenant $x = (u^*_O u - v)(y)$ on montre que pour tout $y \in E$, $\|(u^*_O u - v)(y)\|^2 = 0$ soit $u^*_O u = v$) **(1.5pts)**.
On a $v^* = (u^*_O u)^* = u^*_O (u^*)^* = u^*_O u = v$. Donc v est symétrique, et ainsi $\phi(x, y) =< x, v(y) >=< v(x), y >=< y, v(x) >= \phi(y, x)$ donc ϕ est symétrique **(0.5pts)**. De plus, comme v est une application linéaire et $< \cdot, \cdot >$ est bilinéaire, il est clair que ϕ est une forme bilinéaire symétrique **(0.5pts)**.
(d) On a $\Phi(x) =< u(x), u(x) >= \|u(x)\|^2 \geq 0$ par définition de la norme **(0.5pts)**.
(e) Φ est définie si $\Phi(x) = 0$ entraîne $x = 0$. Mais $\Phi(x) = \|u(x)\|^2 = 0$ est équivalent à $\|u(x)\| = 0$ soit $u(x) = 0$. Par conséquent une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit définie positive est $\ker u = \{0\}$ (ou u bijective) **(1.5pts)**.
(f) Pour $\lambda \neq 0$ et $\neq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $h(\lambda u) = \lambda^2 h(u)$ donc h n'est pas une forme linéaire (car sinon $h(\lambda u) = \lambda h(u)$) **(1pt)**.

□

2. **(5 pts)** Soit $E = \mathbf{R}^3$ et $a \in \mathbf{R}$. Pour $(x, y, z) \in E$, on pose

$$\Phi(x, y, z) = (2 - a)^2 x^2 + 4(1 - a) y^2 + 13 z^2 + 8(1 - a) xy - 2axz.$$

(a) Expliquer pourquoi Φ est bien une forme quadratique sur E.

(b) Déterminer la matrice associée à Φ dans la base canonique de E.

(c) Déterminer, suivant a, la signature de Φ.

(d) Pour quelles valeurs de a, Φ peut-elle s'écrire comme le carré d'une norme?

Proof. (a) On a $\Phi(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_ix_j$, où $a_{ij} \in \mathbf{R}$, donc Φ est une forme quadratique. On note $\psi : E^2 \to \mathbb{R}$ la forme bilineaire symetrique associée à Φ definie par $\psi(x,y,z,x',y',z') = (2-a)^2xx' + 4(1-a)yy' + 13zz' + 4(1-a)(xy'+x'y) - a(xz'+x'z)$ **(0.5pts)**.
(b) La matrice de Φ dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) est donne par $(\psi(e_i,e_j))_{1\le i,j\le 3}$. Un petit calcul nous donne

$$\begin{pmatrix} (2-a)^2 & 4(1-a) & -a \\ 4(1-a) & 4(1-a) & 0 \\ -a & 0 & 13 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5pts)}.$$

(c) Utilisons le principe d'orthogonalisation de Gauss.

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) =& (2-a)^2x^2 + 4(1-a)y^2 + 13z^2 + 8(1-a)xy - 2axz \\ =& 4(1-a)\left(y^2+2xy\right) + (2-a)^2x^2 + 13z^2 - 2axz \\ =& 4(1-a)\,(y+x)^2 - 4(1-a)x^2 + (2-a)^2x^2 + 13z^2 - 2axz \\ =& 4(1-a)\,(y+x)^2 + a^2x^2 + 13z^2 - 2axz\end{aligned}$$

Si $a = 0$, alors $\Phi(x,y,z) = 4(y+x)^2 + 13z^2$, donc la signature de Φ est $(2,0)$. Si $a \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) =& 4(1-a)\,(y+x)^2 + a^2\left(x^2 - \frac{2xz}{a}\right) + 13z^2 \\ =& 4(1-a)\,(y+x)^2 + a^2\left(x - \frac{z}{a}\right)^2 - z^2 + 13z^2 \\ =& 4(1-a)\,(y+x)^2 + a^2\left(x - \frac{z}{a}\right)^2 + 12z^2\end{aligned}$$

Si $a < 1$ et $a \neq 0$, la signature de Φ est $(3,0)$. Si $a = 1$, la signature de Φ est $(2,0)$. Si $a > 1$, la signature de Φ est $(2,1)$ **(3pts)**.
(d) Φ est le carré d'une norme si et seulement si Φ est une forme quadratique définie positive si et seulement si $a \in]-\infty, 0[\cap]0,1[$ **(1pt)**.

□

3. **(13 pts + 3 pts)** Soit $E = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f$ continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt < \infty\}$.

(a) Déterminer une fonction non nulle et continue appartenant à E.

(b) Montrer que E est un espace vectoriel.

(c) Pour $f, g \in E$, on pose $< f,g >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt$. Montrer que $< \cdot,\cdot >$ est une forme bilinéaire symetrique sur E et que sa forme quadratique associée est positive. On notera désormais $\|f\| = \sqrt{< f,f >}$.

(d) Soit $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction telle que $\psi(x) = 1$ quand $x \in]0,1/2[$, $\psi(x) = -1$ quand $x \in]1/2,1[$ et $\psi(x) = 0$ sinon. Montrer que $\psi \in E$. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt$ et $\|\psi\|$.

(e) Pour $j \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{Z}$, on note $\psi_{j,k}$ la fonction telle que $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(\frac{x}{2^j} - k)$. Déterminer $\|\psi_{j,k}\|$.

(f) Montrer que pour tout $j \in \mathbf{Z}$, $\psi_{j,k}\psi_{j,k'} = 0$ pour $k \neq k'$.

(g) Soit $j' > j$ avec $(j,j') \in \mathbf{Z}$. Montrer que $\psi_{j,k}\psi_{j',k'} = \begin{cases} 2^{-\frac{j'}{2}}\psi_{j,k} & \text{quand } 2^{j'-j}k' = k \\ -2^{-\frac{j'}{2}}\psi_{j,k} & \text{quand } 2^{j'-j}(k'+1) = k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

(h) Déduire de (f) et (g) que $(\psi_{j,k})_{j\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z}}$ est une famille $< .,. >$-orthonormale de E.

(i) Soit F_N le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(\psi_{j,k})_{-N\le j\le N,-N\le k\le N}$ où $N \in \mathbf{N}$. Déterminer $\dim F_N$. Pour $f \in E$, rappeler l'expression de $p_{F_N}(f)$ la projection orthogonale de f sur F_N.

(j) **(Question facultative 4 pts)** On admettra que pour $f \in E$, $f = \lim_{N\to\infty} p_{F_N}(f)$. Soit la fonction $f(x) = x^2$ lorsque $x \in [-1,1]$ et $f(x) = 0$ sinon. Calculer $< f, \psi_{j,k} >$ pour tous $j \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{Z}$ et en déduire $\lim_{N\to\infty} p_{F_N}(f)$.

Proof. (a) $f(x) = (x^2+1)^{-1}$ est une fonction continue telle que $f \in E$ **(0.5pts)**.
(b) Montrons que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^{0pm}$ (ensemble des fonctions continues par morceaux). $E \subset \mathcal{C}^{0pm}$ par définition. $E \neq \emptyset$ car la fonction identiquement nulle appartient à E. Enfin, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ et $\forall f, g \in E$ nous avons λf et $f+g$ sont continues par morceaux et $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda f(t)|^2\, dt = \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty$ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)+g(t)|^2\, dt \le 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt < \infty$ **(1.5pts)**.
(c) Bilinéairité $< f, \lambda g + \mu h > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\lambda h(t) + \mu g(t)\right) dt = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt + \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h(t) dt = \lambda < f, g >$ $+\mu < f, h >$ Symétrie $< f, g > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t) dt = < f, g >$ Positivité $< f, f > = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt \ge$ 0 **(1pt)**.
(d) Par définition, ψ est continue par morceaux et $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} 1^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-1)^2 dt = 1 < \infty$ **(0.5pts)**.
Calculons $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-1) dt = 0 < \infty$ **(0.5pts)**. Enfin, $\|\psi\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = 1$ **(0.5pts)**.
(e) En utilisant le changement de variable $\frac{x}{2^j} - k = y$, on obtient
$\|\psi_{j,k}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{j,k}(t)|^2\, dt = 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi\left(\frac{x}{2^j} - k\right)(x)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(y)|^2\, dy = 1$ **(0.5pts)**.
(f) Fixons $j \in \mathbf{Z}$. Par définition, $\psi_{j,k} \neq 0 \Leftrightarrow k < \frac{x}{2^j} < k+1$ et $\psi_{j,k'} \neq 0 \Leftrightarrow k' < \frac{x}{2^j} < k'+1$.
Donc, $k \neq k' \Rightarrow]k, k+1[\cap]k', k'+1[= \emptyset \Rightarrow \psi_{j,k}\psi_{j,k'} = 0$ **(2pts)**.
(g) Par définition, $\psi_{j,k} \neq 0 \Leftrightarrow k < \frac{x}{2^j} < k+1$ et en utilisant $j' = j + (j' - j)$, on a
$\psi_{j',k'} \neq 0 \Leftrightarrow k' < \frac{x}{2^{j'}} < k'+1 \Leftrightarrow 2^{j'-j} k' < \frac{x}{2^j} < 2^{j'-j}(k'+1)$. On déduit de ces 2 relations et du fait que $2^{j'-j} \ge 1$,

$$\psi_{j,k}\psi_{j',k'} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} k < \frac{x}{2^j} < k+1 \\ 2^{j'-j}k' < \frac{x}{2^j} < 2^{j'-j}(k'+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2^{j'-j}k' \\ \text{ou} \\ k+1 = 2^{j'-j}(k'+1) \end{cases}$$

Cas : $2^{j'-j}k' = k$**.** En utilisant les relations précédentes,
$\psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(x) = 2^{-\frac{j'}{2}} \psi_{j,k}(x) \psi\left(\frac{1}{2^{j'-j}}\left(\frac{x}{2^j} - k\right)\right) = 2^{-\frac{j'}{2}} \psi_{j,k}(x)$
Cas : $2^{j'-j}(k'+1) = k+1$**.** Par un même raisonnement et en utilisant $-k' = -\frac{k}{2^{j'-j}} + 1 - \frac{1}{2^{j'-j}}$
$\psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(x) = 2^{-\frac{j'}{2}} \psi_{j,k}(x) \psi\left(\frac{1}{2^{j'-j}}\left(\frac{x}{2^j} - k\right) + 1 - \frac{1}{2^{j'-j}}\right) = -2^{-\frac{j'}{2}} \psi_{j,k}(x)$
(4pts).

(h) Soit $(j,k) \neq (j',k')$ $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \begin{cases} 2^{\frac{j'}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) dt \text{ si } 2^{j'-j}k' = k \\ -2^{\frac{j'}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) dt \text{ si } 2^{j'-j}(k'+1) = k+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Or un calcul montre que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) dt = 0$. D'où l'orthogonalité. L'orthonormalité résulte de (e). **(1pts)**.
(i) Montrons que F_N est de dimension $(2N+1)^2$. Pour cela, il suffit de montrer que la famille $(\psi_{j,k})_{-N\le j\le N, -N\le k\le N}$, composée de $(2N+1)^2$ éléments, est une base de F_N. Par définition, $(\psi_{j,k})_{-N\le j\le N, -N\le k\le N}$ engendre F_N. Soit $(\lambda_{j,k})_{-N\le j\le N, -N\le k\le N}$ $(2N+1)^2$ réels tels que $\sum_{-N\le j,k\le N} \lambda_{j,k}\psi_{j,k} = 0$ d'où
$0 = \left\langle \sum_{-N\le j,k\le N} \lambda_{j,k}\psi_{j,k}, \sum_{-N\le j,k\le N} \lambda_{j,k}\psi_{j,k} \right\rangle$. Utilisant l'orthonormalité de la famille (question (h)) on obtient finalement, $\sum_{-N\le j,k\le N} \lambda_{j,k}^2 = 0$ ce qui implique que $\lambda_{j,k} = 0$ pour tout $-N \le j,k \le N$ donc la famille est libre **(1pt)**. La projection orthogonale de f sur F_N est donnée par $p_N(f) = \sum_{-N\le j,k\le N} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}$ **(0.5pts)**.

(j) $f\psi_{j,k} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} j \le 0 \text{ et } -2^{-j} \le k < 2^{-j} \\ j > 0 \text{ et } k \in \{-1, 0\} \end{cases}$ Si $j \le 0$ et $-2^{-j} \le k < 2^{-j}$, alors

$$\begin{aligned} \langle f, \psi_{j,k}\rangle =& 2^{-\frac{j}{2}} \int_{k2^j}^{(k+\frac{1}{2})2^j} x^2 dx - 2^{-\frac{j}{2}} \int_{(k+\frac{1}{2})2^j}^{(k+1)2^j} x^2 dx \\ =& -\frac{1}{3} 2^{3j-\frac{j}{2}} \left((k+1)^3 - 2\left(k+\frac{1}{2}\right)^3 + k^3\right) \end{aligned}$$

Si $j > 0$ alors $\langle f, \psi_{j,0}\rangle = 2^{-\frac{j}{2}} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} 2^{-\frac{j}{2}}$ et $\langle f, \psi_{j,-1}\rangle = -2^{-\frac{j}{2}} \int_{-1}^0 x^2 dx = -\frac{1}{3} 2^{-\frac{j}{2}}$. Finalement, en appliquant le resultat admis, on obtient

$$f = \lim_{N\to\infty} p_{F_N}(f) = \frac{1}{3} \sum_{j\ge 1} 2^{-\frac{j}{2}} (\psi_{j,0} - \psi_{j,-1}) - \frac{1}{3} \sum_{j\le 0} \sum_{k=-2^{-j}}^{2^{-j}-1} 2^{3j-\frac{j}{2}} \left((k+1)^3 - 2\left(k+\frac{1}{2}\right)^3 + k^3\right) \psi_{j,k} \text{ (3pts)}.$$

□