Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2010 – 2011

Algèbre S4

Examen final, mai 2011

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(7 pts)** Soit $E = \mathbf{R}^3$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in E$, on note $\phi_\alpha(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - \alpha(x_3y_2 + x_2y_3) + x_3y_3$.

   (a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, ϕ_α est une forme bilinéaire symétrique dont on donnera la matrice dans la base canonique de E.

   (b) Déterminer suivant les valeurs de α la signature de la forme quadratique Φ_α associée à ϕ_α. Pour quelles valeurs de α, ϕ_α est-elle un produit scalaire?

   (c) Montrer que l'application $x = (x_1, x_2, x_3) \in E \mapsto u(x) = x_1 - x_3$ est une forme linéaire de E. Pour quelles valeurs de α existe-t-il un unique vecteur $z_\alpha \in E$, que l'on précisera, tel que $u(x) = \phi_\alpha(x, z_\alpha)$ pour tout $x \in E$?

   (d) On pose dans cette question $\alpha = 0$. Soit le vecteur $t = (1, -1, 1)$ et soit $F = \{c\,t,\ c \geq 0\}$. Montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$ (la notion d'orthogonalité s'entendant par rapport à ϕ_α).

   (e) On pose dans cette question $\alpha = 1$. Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ_1. Est-ce un sous-espace vectoriel de E?

2. **(6 pts)** Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que A est la matrice d'une isométrie notée u.

   (b) Si $(E, < \cdot, \cdot >)$ est un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E, on dit qu'une application linéaire $s : E \to E$ est une symétrie orthogonale sur F si pour tout $x \in F$, $s(x) = x$ et pour tout $x \in F^\perp$, $s(x) = -x$. Montrer que s est une isométrie, puis que s est diagonalisable en précisant ses valeurs propres. Montrer que $s = s^*$.

   (c) Montrer que u est une symétrie orthogonale par rapport à un plan que l'on précisera. En déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

3. **(20 pts)** Soit l'ensemble E des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$.

   (a) Montrer que E est un espace vectoriel et que $\dim(E) = \infty$.

   (b) Soit $f \in E$. On pose $g(t) = f(t/\pi)$. Montrer que g est développable en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ et donner son développement en série de Fourier. En déduire que f peut s'écrire sur $[-1,1]$ comme une somme infinie de sinus et cosinus que l'on précisera. Traiter le cas particulier de $f(t) = 1 - t^2$ si $t \in [-1,1]$.

   (c) Pour f et g deux fonctions de E, on considère l'application

   $$(f,g) \in E^2 \mapsto < f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)^{-1/2}dt.$$

   On note également F l'espace vectoriel des polynômes définis sur $[-1,1]$ et F_n l'espace vectoriel des polynômes de dégré au plus n définis sur $[-1,1]$.

   i. Montrer que $< f, g >$ existe pour toutes fonctions f et g de E.

   ii. Montrer que $< f, g >$ est un produit scalaire sur E.

   iii. On rappelle que la fonction $x \in [-1,1] \mapsto \arccos(x)$ est la fonction réciproque de la fonction $x \in [0, \pi] \mapsto \cos(x)$. Faire un tracé de ces deux fonctions. Démontrer que $(\arccos)'(x) = -(1-x^2)^{-1/2}$ pour $x \in]-1,1[$.

   iv. On considère les fonctions $f_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ pour $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbf{N}$. Déterminer une expression simple de $f_0(x)$ et $f_1(x)$. Plus généralement, démontrer que f_n est un polynôme de degré n appartenant à F_n (on pourra utiliser la formule de délinéarisation $\cos(nx) = \mathcal{R}e((\cos(x) + i\sin(x))^n))$.

   v. Démontrer que $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de F (penser à un changement de variable dans le calcul du produit scalaire). En déduire l'expression d'une famille orthonormale de F appelée $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

   vi. On note $\|h\| = (< h, h >)^{1/2}$ pour $h \in E$. Démontrer que pour tout $f \in E$, il existe un unique polynôme $t_n(f) \in F_n$ tel que $\|f - t_n(f)\| = \min_{h\in F_n} \|f - h\|$ et déterminer l'expression de $t_n(f)$ en fonction de f et de la famille des g_k.

   vii. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|f - t_{n+1}(f)\|^2 \leq \|f - t_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2$. En déduire, en utilisant une inégalité triangulaire, que $\lim_{n\to\infty} \|t_n(f)\| = \|t_\infty(f)\|$ existe pour toute fonction $f \in E$. Exprimer $\|t_\infty(f)\|^2$ sous forme d'une série infinie.

   viii. On montre (ne pas le faire) que $\|f\|^2 = \|t_\infty(f)\|^2$ pour toute fonction f continue sur $[-1,1]$. En utilisant cette égalité pour $f(t) = \arccos(t)$, en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.