Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2010 – 2011

Algèbre S4

Examen final, mai 2011

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(7 pts)** Soit $E = \mathbf{R}^3$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in E$, on note $\phi_\alpha(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - \alpha(x_3y_2 + x_2y_3) + x_3y_3$.
   (a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, ϕ_α est une forme bilinéaire symétrique dont on donnera la matrice dans la base canonique de E.
   (b) Déterminer suivant les valeurs de α la signature de la forme quadratique Φ_α associée à ϕ_α. Pour quelles valeurs de α, ϕ_α est-elle un produit scalaire?
   (c) Montrer que l'application $x = (x_1, x_2, x_3) \in E \mapsto u(x) = x_1 - x_3$ est une forme linéaire de E. Pour quelles valeurs de α existe-t-il un unique vecteur $z_\alpha \in E$, que l'on précisera, tel que $u(x) = \phi_\alpha(x, z_\alpha)$ pour tout $x \in E$?
   (d) On pose dans cette question $\alpha = 0$. Soit le vecteur $t = (1, -1, 1)$ et soit $F = \{c\, t,\ c \geq 0\}$. Montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$ (la notion d'orthogonalité s'entendant par rapport à ϕ_α).
   (e) On pose dans cette question $\alpha = 1$. Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ_1. Est-ce un sous-espace vectoriel de E?

Proof. (a) On a $\phi_\alpha(x, y) = {}^tXMY$ avec $X = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$, matrice symétrique, donc ϕ_α est bien une forme bilinéaire symétrique et M est sa matrice dans la base canonique de E **(0.5pts)**.
(b) On peut écrire que $\Phi_\alpha(x) = 2x_1^2 + (x_2 - \alpha x_3)^2 + (1 - \alpha^2)x_3^2$. Donc la signature de Φ_α est $(3, 0)$ si $|\alpha| < 1$, $(2, 0)$ si $\alpha = \pm 1$ et $(2, 1)$ si $|\alpha| > 1$ **(1pt)**.
En conséquence ϕ_α est un produit scalaire (donc Φ_α est définie positive) si $|\alpha| < 1$ **(0.5pts)**.
(c) On a u application linéaire (combinaison linéaire des coordonnées de x) et à valeurs dans $\mathbf{R}$ donc u est une forme linéaire de E **(0.5pts)**. Supposons que $z_\alpha = (z_1, z_2, z_3) \in E$ est tel que $\phi(x, z_\alpha) = u(x)$ pour tout $x \in E$. Alors $2x_1z_1 + x_2(z_2 - \alpha z_3) + x_3(z_3 - \alpha z_2) = x_1 - x_3$ pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. En choisissant $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = 1$, on a $z_3 - \alpha z_2 = -1$, et de même, $z_1 = 2$ et $z_2 - \alpha z_3 = 0$, d'où $z_3(1 - \alpha^2) = -1$. Donc si $\alpha \neq \pm 1$, il existe une unique solution: $z_\alpha = (2, -\alpha(1 - \alpha^2)^{-1}, -(1 - \alpha^2)^{-1})$ et $\alpha = \pm 1$, il n'y a pas de solution **(1.5pts)**.
(d) F n'est pas un sev de E car $-t \notin F$ **(0.5pts)**. On a ϕ_0 qui est un produit scalaire et comme $F^\perp = Vect(t)^\perp$, avec $\dim E = 3$, il est clair que $\dim F^\perp = 2$. On a $\phi_0(t, (0, 1, 1)) = 0$ et $\phi_0(t, (1, 2, 0)) = 0$, et comme $(0, 1, 1)$ et $(1, 2, 0)$ ne sont pas colinéaires, $F^\perp = Vect((0, 1, 1)\ ,\ (1, 2, 0))$. Il ne reste plus qu'à rendre orthonormale cette base. Un premier vecteur est $e_1 = (0, 1, 1)/\|(0, 1, 1)\| = (0, 1, 1)/\sqrt{2}$. Le second vecteur est $e_2 = ((1, 2, 0) - \phi_0((1, 2, 0), e_1)e_1)/\|(1, 2, 0) - \phi_0((1, 2, 0), e_1)e_1\| = (1, 1, -1)/2$ **(1.5pts)**.
(e) $\Phi_1(x) = 0$ est équivalent à $2x_1^2 + (x_2 - x_3)^2 = 0$ sont $x_1 = 0$ et $x_2 = x_3$ **(0.5pts)**. L'ensemble des vecteurs constitue donc une droite vectorielle de base $(0, 1, 1)$ **(0.5pts)**.

□

2. **(6 pts)** Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que A est la matrice d'une isométrie notée u.

   (b) Si $(E, < \cdot, \cdot >)$ est un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E, on dit qu'une application linéaire $s : E \to E$ est une symétrie orthogonale sur F si pour tout $x \in F$, $s(x) = x$ et pour tout $x \in F^{\perp}$, $s(x) = -x$. Montrer que s est une isométrie, puis que s est diagonalisable en précisant ses valeurs propres. Montrer que $s = s^*$.

   (c) Montrer que u est une symétrie orthogonale par rapport à un plan que l'on précisera. En déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Proof. (a) Comme A est symétrique, il suffit de calculer A^2 et on voit vite que $A^2 = I_3$: A est donc bien la matrice d'une isométrie **(0.5pts)**.
(b) Soit $y \in E$. Alors on peut écrire de manière unique $y = y_F + y_{F\perp}$ car E est de dimension finie et donc $E = F \oplus F \perp$. Or $s(y) = y_F - y_{F\perp}$, donc $\|s(y)\|^2 = \|y_F\|^2 + \|y_{F\perp}\|^2$ d'après Pythagore puisque y_F et $y_{F\perp}$ sont orthogonaux. Mais $\|y\|^2 = \|y_F\|^2 + \|y_{F\perp}\|^2$ donc $\|s(y)\| = \|y\|$ pour tout $y \in E$: s est bien une isométrie **(1.5pts)**.
Pour tout vecteur $y_F \in F$, on a $s(y_F) = y_F$: 1 est donc valeur propre de sev propre associé F. De même, pour tout vecteur $y_{F\perp} \in F \perp$, on a $s(y_{F\perp}) = -y_{F\perp}$: -1 est donc valeur propre de sev propre associé $F^{\perp}$. Comme $E = F \oplus F \perp$, s est donc diagonalisable, car E peut être constitué par une base de vecteurs propres **(1pt)**.
On a s isométrie, donc $s_0 s^* = I_d$, et en plus $s_O s(y) = s(y_F - y_{F\perp}) = y_F + y_{F\perp} = y$: donc $s^2 = I_d$. D'après l'unicité de l'inverse d'un endomorphisme, $s = s^*$ **(1pt)**.
(c) On diagonalise A et on obtient que 1 et -1 sont des valeurs propres de mutliplicités respectives 2 et 1. Les sev propre associé à 1 est $\{(x, y, z),\ -x + 2y + z = 0\}$ donc engendré par $(1, 0, 1)$ et $(2, 1, 0)$, et le sev propre associé à -1 est engendré par $(-1, 2, 1)$. Aussi A est bien la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel engendré par $(1, 0, 1)$ et $(2, 1, 0)$ **(1.5pts)**.
On a $A^{2n} = I_3$ et $A^{2n+1} = A$ pour $n \in \mathbf{N}$ **(0.5pts)**.

□

3. **(20 pts)** Soit l'ensemble E des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$.

   (a) Montrer que E est un espace vectoriel et que $\dim(E) = \infty$.

   (b) Soit $f \in E$. On pose $g(t) = f(t/\pi)$. Montrer que g est développable en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ et donner son développement en série de Fourier. En déduire que f peut s'écrire sur $[-1, 1]$ comme une somme infinie de sinus et cosinus que l'on précisera. Traiter le cas particulier de $f(t) = 1 - t^2$ si $t \in [-1, 1]$.

   (c) Pour f et g deux fonctions de E, on considère l'application

$$(f, g) \in E^2 \mapsto < f, g > = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)^{-1/2} dt.$$

   On note également F l'espace vectoriel des polynômes définis sur $[-1, 1]$ et F_n l'espace vectoriel des polynômes de dégré au plus n définis sur $[-1, 1]$.

   i. Montrer que $< f, g >$ existe pour toutes fonctions f et g de E.

   ii. Montrer que $< f, g >$ est un produit scalaire sur E.

   iii. On rappelle que la fonction $x \in [-1, 1] \mapsto \arccos(x)$ est la fonction réciproque de la fonction $x \in [0, \pi] \mapsto \cos(x)$. Faire un tracé de ces deux fonctions. Démontrer que $(\arccos)'(x) = -(1 - x^2)^{-1/2}$ pour $x \in]-1, 1[$.

   iv. On considère les fonctions $f_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbf{N}$. Déterminer une expression simple de $f_0(x)$ et $f_1(x)$. Plus généralement, démontrer que f_n est un polynôme de degré n appartenant à F_n (on pourra utiliser la formule de délinéarisation $\cos(nx) = \mathcal{R}e((\cos(x) + i \sin(x))^n)$).

   v. Démontrer que $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de F (penser à un changement de variable dans le calcul du produit scalaire). En déduire l'expression d'une famille orthonormale de F appelée $(g_k)_{k \in \mathbf{N}}$.

vi. On note $\|h\| = (<h,h>)^{1/2}$ pour $h \in E$. Démontrer que pour tout $f \in E$, il existe un unique polynôme $t_n(f) \in F_n$ tel que $\|f - t_n(f)\| = \min_{h \in F_n} \|f - h\|$ et déterminer l'expression de $t_n(f)$ en fonction de f et de la famille des g_k.

vii. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|f - t_{n+1}(f)\|^2 \leq \|f - t_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2$. En déduire, en utilisant une inégalité triangulaire, que $\lim_{n\to\infty} \|t_n(f)\| = \|t_\infty(f)\|$ existe pour toute fonction $f \in E$. Exprimer $\|t_\infty(f)\|^2$ sous forme d'une série infinie.

viii. On montre (ne pas le faire) que $\|f\|^2 = \|t_\infty(f)\|^2$ pour toute fonction f continue sur $[-1,1]$. En utilisant cette égalité pour $f(t) = \arccos(t)$, en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

Proof. (a) Il est facile de montrer que E sev de l'ensemble des fonctions de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui est un ev **(0.5pts)**. Les fonctions $x \in [-1,1] \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbf{N}$ sont des fonctions de E qui forme une famille libre, d'où $\dim E = \infty$ **(0.5pts)**.
(b) On a g qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$, donc on peut appliquer le théorème de Dirichlet et $g(t) = \frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(g)\cos(kt) + b_k(g)\sin(kt)$ pour tout $t \in [-\pi,\pi]$ et $a_k(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(kt)dt$ et $b_k(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(kt)dt$ **(0.5pts)**.
On pose maintenant $s = t/\pi$, soit $t = s\pi$, et ainsi $f(s) = \frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(g)\cos(k\pi s) + b_k(g)\sin(k\pi s)$. il ne reste plus qu'à exprimer $a_k(g)$ et $b_k(g)$ en fonction de f par un changement de variable: $a_k(g) = a'_k(f) = \int_{-1}^{1} f(s)\cos(\pi s)ds$ et $b_k(g) = b'_k(f) = \int_{-1}^{1} f(s)\sin(\pi s)ds$ **(1pt)**.
Si $f(t) = 1 - t^2$, fonction paire, pour simplifier on se contente de t^2 car le développement de 1 est ... 1. Pour t^2, on a clairement $b'_k(t^2) = 0$ et avec une IPP, quand $k > 0$, $a'_k(t^2) = 2\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)dt = -\frac{4}{k}\int_0^1 t\sin(k\pi t)dt = \frac{4(-1)^k}{k^2}$. Quand $k = 0$, $a'_0(t^2) = 2/3$. D'où $1 - t^2 = 2/3 - 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(k\pi t)$ **(1.5pts)**.
(c) i. Soit $h = fg$, qui est une fonction continue sur $[-1,1]$. $<f,g> = \int_{-1}^{1} h(t)(1-t^2)^{-1/2}dt$ est une intégrale impropre avec problèmes de comvergence en 1 et -1. En 1, $h(t)(1-t^2)^{-1/2} \sim 2^{-1/2}\,h(1)\,(1-t)^{-1/2}$. Mais $\int_0^1 (1-t)^{-1/2}dt$ existe (intégrale de type Riemann) donc par le théorème de comparaison des intégrales absolument convergentes, $\int_{-1}^{1} h(t)(1-t^2)^{-1/2}dt$ converge en 1. On procède de la même manière en -1, où $h(t)(1-t^2)^{-1/2} \sim 2^{-1/2}\,h(-1)\,(1+t)^{-1/2}$. En conséquence $<f,g>$ existe pour toutes fonctions f et g de E **(1.5pts)**.
ii. On montre, grâce aux propriétés de l'intégrale, les propriétés de linéarité, de symétrie et de positivité de $<f,g>$. De plus comme $f^2(t)(1-t^2)^{-1/2}$ est une fonction positive et continue sur $]-1,1[$, alors $<f,g> = 0$ entraîne que $f^2(t)(1-t^2)^{-1/2} = 0$ sur $]-1,1[$, soit f nulle sur $]-1,1[$. Comme f est continue sur $[-1,1]$ on en conclue que $f = 0$ sur $[-1,1]$, donc $<f,g>$ est bien un produit scalaire **(1.5pts)**(=0.5 (linéarité, symétrie, poistivité) + 0.5 (définie sur $]-1,1[$) +0.5 définie sur $[-1,1]$).
iii. Tracé: connu **(0.5pts)**. Comme $\arccos(\cos x) = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $-\sin x \arccos'(\cos x) = 1$, donc comme $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ pour $x \in [0,\pi]$, on a $\arccos'(\cos x) = -(1-\cos^2 x)^{-1/2}$, soit $\arccos'(y) = -(1-y^2)^{-1/2}$ pour $y \in]-1,1[$ **(0.5pts)**.
iv. On a $f_0(x) = 1$ et $f_1(x) = x$ pour $x \in [-1,1]$ **(0.5pts)**.
D'une manière générale, $\cos(nx) = \mathcal{R}e\big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k \sin^k(x)\cos^{n-k}(x)\big) = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}(-1)^k \sin^{2k}(x)\cos^{n-2k}(x)$ car pour les k pairs, i^k est un imaginaire pur. Mais $\sin^{2k}(x) = (1-\cos^2(x))^k$ pour tout $x \in [-1,1]$, d'où $f_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}(-1)^k(1-x^2)^k x^{n-2k}$, car $\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout $x \in [-1,1]$. Donc f_n est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Il est clair que son coefficient de plus haut degré est $\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}x^n = 2^{n-1}x^n$: donc le degré de f_n est exactement n **(2.5pts)**.
v. On calcule $<f_i,f_j> = \int_{-1}^{1} \cos(i\arccos(t))\cos(j\arccos(t))(1-t^2)^{-1/2}dt = -\int_{\pi}^{0}\cos(ix)\cos(jx)dx$ avec le changement de variable $x = \arccos(t)$. Or $\cos(ix)\cos(jx) = \frac{1}{2}(\cos((i+j)x) + \cos((i-j)x))$ donc si $i \neq j$, $<f_i,f_j> = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((i+j)x) + \cos((i-j)x)dx = 0$ et si $i = j$, $<f_i,f_i> = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}dx = \pi/2$ pour $i \neq 0$ et $<f_i,f_i> = \pi$: la suite (f_n) est bien une suite orthogonale **(2pts)**.
Une famille orthonormale est donc la suite (g_k) avec $g_k = f_k\sqrt{2/\pi}$ pour $k \neq 0$ et $g_0 = f_0\sqrt{1/\pi}$ **(0.5pts)**.
vi. Il est clair que comme F_n est de dimension finie ($= n+1$) il existe un unique projeté orthogonale de f sur F_n qui est $t_n(f)$ **(0.5pts)**. Son expression est $t_n(f) = \sum_{k=0}^{n} <f,g_k>g_k$ car $(g_k)_{0\leq k\leq n}$ base orthonormale de F_n **(0.5pts)**.
vii. On a $f - t_n(f) = P_{F_n^\perp}(f)$ où P_A désigne le projeté orthogonale sur A. Or $F_{n+1}^\perp \subset F_n^\perp$ donc $P_{F_n^\perp}(f) = P_{F_{n+1}^\perp}(f) + h_n$ avec h_n appartenant à l'orthogonal de $F_{n+1}^\perp$ dans F_n^perp. D'après Pythagore, $\|P_{F_n^\perp}(f)\|^2 = \|P_{F_{n+1}^\perp}(f)\|^2 + \|h_n\|^2$ donc $\|f - t_{n+1}(f)\|^2 \leq \|f - t_n(f)\|^2$. De même, $F_n^\perp \subset E$ donc $\|P_{F_n^\perp}(f)\|^2 \leq \|P_E(f)\|^2$ soit $\|f - t_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2$ **(2pts)**.
On a d'après ce qui précède, la suite $(\|f - t_n(f)\|)_n$ qui est une suite décroissante et majorée donc elle converge. De plus, $\|t_n(f)\| \leq \|t_n(f) - f\| + \|f\|$ d'après l'inégalité triangulaire, $(\|t_n(f)\|)_n$ suite croissante car $\|t_n(f)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} <f,g_k>^2$ donc cette suite est bornée et ainsi $\lim_{n\to\infty}\|t_n(f)\| = \|t_\infty(f)\|$ existe pour toute

fonction f **(1.5pts)**.
On a $\|t_\infty(f)\|^2 = \sum_{k=0}^\infty < f, g_k >^2$ **(0.5pts)**.
viii. Il suffit de calculer $< f, g_k >= \sqrt{2/\pi}\int_{-1}^1 \text{arcos}(t)\cos(k\text{arcos}(t))(1-t^2)^{-1/2}dt = \sqrt{2/\pi}\int_0^\pi x\cos(kx)dx$ avec le changement de variable $x = \text{arcos}(t)$. Avec une IPP, $< f, g_k >= \sqrt{2/\pi}\frac{1}{k^2}[-\cos(kx)]_0^\pi = 2\sqrt{2/\pi}\frac{1}{k^2}$ si k est impair et 0 si k est pair (et $< f, g_0 >= \sqrt{2/\pi}\pi^2/2)$. Ainsi $\|f\|^2 = \int_0^\pi x^2 dx = \pi^3/3 = ((\sqrt{1/\pi})(\pi^2/2))^2 + \sum_{k=0}^\infty 4(\sqrt{2/\pi})^2\frac{1}{(2k+1)^4}$, d'où $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^4} = \pi^4/96$ **(1.5pts)**. $\square$