Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 – 2012

Algèbre S4

Examen final, mai 2012

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(7 points)** Soit $< \cdot, \cdot >$ un produit scalaire sur E un espace vectoriel de dimension finie et soit u un endomorphisme de E.

   (a) Pour $x, y \in E$, soit $\phi(x,y) =< u(x), u(y) >$. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique de E **(1.5 pts)**.

   (b) Montrer que $\phi(x,y) =< x, y >$ pour tout $x, y \in E$ si et seulement si u est une isométrie (vectorielle) de E **(3 pts)**.

   (c) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E si et seulement si $\ker u = \{0_E\}$ **(1.5 pts)**.

   (d) Soit Ψ la forme quadratique associée à ϕ. Déterminer la signature de Ψ en fonction du rang de u **(1 pt)**.

2. **(16 points)** Soit $E = \mathbf{R}^3$ et pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ appartenant à E, on note

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_1 x_3 + 2\,x_2 x_3 + 3x_3^2.$$

   (a) Montrer que $\|\cdot\|$ est bien une norme associée à un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ que l'on précisera **(2 pts)**.

   (b) Déterminer une base orthonormale e pour $(E, < \cdot, \cdot >)$ **(1.5 pts)**.

   (c) Déterminer la base duale e^* de e (on exprimera les formes linéaires en fonction de $(x_1, x_2, x_3) \in E$) **(2 pts)**.

   (d) Soit $F = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$. Montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E **(1 pt)** et déterminer $F^\perp$ **(1.5 pts)**.

   (e) Soit $x_0 = (1, 1, 1)$ et f une application sur E telle que $f(x) = -2 < x, x_0 >$. Montrer que f est une forme linéaire sur E **(0.5 pts)** et déterminer ses coordonnées dans e^* **(1.5 pts)**.

   (f) Soit $G = \{x \in E, < x, x_0 >= 0\}$. Montrer sans calcul que $\dim G = 2$ **(0.5 pts)**. Déterminer $G^\perp$ **(1 pt)**.

   (g) Déterminer la matrice dans e de la projection orthogonale P_G sur G **(2.5 pts)**.

   (h) Soit $x_1 \in G$, avec $x_1 \neq 0_E$. Soit H la droite vectorielle engendrée par x_1 et soit P_H la projection orthogonale sur H. Montrer que $P_H(P_G) = P_G(P_H) = P_H$ **(2 pts)**.