Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 – 2012

Algèbre S4

Correction de l'examen final, mai 2012

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(7 points)** Soit $< \cdot, \cdot >$ un produit scalaire sur E un espace vectoriel de dimension finie et soit u un endomorphisme de E.

   (a) Pour $x, y \in E$, soit $\phi(x, y) =< u(x), u(y) >$. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique de E **(1.5 pts)**.

   (b) Montrer que $\phi(x, y) =< x, y >$ pour tout $x, y \in E$ si et seulement si u est une isométrie (vectorielle) de E **(3 pts)**.

   (c) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E si et seulement si $\ker u = \{0_E\}$ **(1.5 pts)**.

   (d) Soit Ψ la forme quadratique associée à ϕ. Déterminer la signature de Ψ en fonction du rang de u **(1 pt)**.

Proof. (a) On montre facilement que $\phi(x, y) = \phi(y, x)$, puis $\phi(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) =< u(x), u(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) >=< u(x), \lambda_1 u(y_1)\lambda_2 u(y_2)) >= \lambda_1 \phi(x, y_1) + \lambda_2 \phi(x, y_2)$ car u est un endomorphisme et $<, >$ est un produit scalaire.
(b) On a $< u(x), u(y) >=< x, u^*(u(y)) >$ avec u^* l'endomorphisme adjoint de u (qui existe car E est de dimension finie). Ainsi $< u(x), u(y) >=< x, y >$ pour tout $x, y \in E$ si et seulement si $< x, u^*(u(y)) >=< x, y >$ pour tout $x, y \in E$ donc si et seulement si $< x, u^*(u(y)) - y >= 0$ pour tout $x, y \in E$. Si $u^*_{\circ} u = Id$, donc u isométrie, il est clair que ceci est vérifié. Par ailleurs, en prenant $x = u^*(u(y)) - y$ pour tout $y \in E$, on a $\|u^*(u(y)) - y\|^2 = 0$ donc d'après la propriété 4 du produit scalaire, $u^*(u(y)) - y = 0$ pour tout $y \in E$, donc $u^*_{\circ} u = Id$: u est bien une isométrie.
(c) Les deux premières propriétés d'un produit scalaire sont vérifiées par ϕ d'après (a). Pour tout $x \in E$, $\phi(x, x) = \|u(x)\|^2$, donc $\phi(x) \geq 0$. Enfin $\phi(x, x) = 0$ est équivalent à $\|u(x)\| = 0$, soit $u(x) = 0$ donc $x \in \ker u$.
(d) On a $\Psi(x) = \|u(x)\|^2$ donc Ψ est positive et la signature de Ψ est $(n - \dim(\ker(u)), 0) = (\mathrm{Rang(u)}, 0)$.

□

2. **(16 points)** Soit $E = \mathbf{R}^3$ et pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ appartenant à E, on note

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_1 x_3 + 2\,x_2 x_3 + 3x_3^2.$$

   (a) Montrer que $\| \cdot \|$ est bien une norme associée à un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ que l'on précisera **(2 pts)**.

   (b) Déterminer une base orthonormale e pour $(E, < \cdot, \cdot >)$ **(1.5 pts)**.

   (c) Déterminer la base duale e^* de e (on exprimera les formes linéaires en fonction de $(x_1, x_2, x_3) \in E$) **(2 pts)**.

   (d) Soit $F = \{x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$. Montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E **(1 pt)** et déterminer $F^{\perp}$ **(1.5 pts)**.

(e) Soit $x_0 = (1,1,1)$ et f une application sur E telle que $f(x) = -2 < x, x_0 >$. Montrer que f est une forme linéaire sur E **(0.5 pts)** et déterminer ses coordonnées dans e^* **(1.5 pts)**.

(f) Soit $G = \{x \in E, < x, x_0 >= 0\}$. Montrer sans calcul que $\dim G = 2$ **(0.5 pts)**. Déterminer $G^\perp$ **(1 pt)**.

(g) Déterminer la matrice dans e de la projection orthogonale P_G sur G **(2.5 pts)**.

(h) Soit $x_1 \in G$, avec $x_1 \neq 0_E$. Soit H la droite vectorielle engendrée par x_1 et soit P_H la projection orthogonale sur H. Montrer que $P_H(P_G) = P_G(P_H) = P_H$ **(2 pts)**.

Proof. (a) On a facilement $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 3x_3y_3$. Ceci est bien un produit scalaire car la symétrie et la bilinéarité sont évidentes, et $\|x\|^2 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2$ donc $\|x\|^2 \geq 0$ pour tout $x \in E$ et $\|x\| = 0$ est équivalent à $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ et $x_3 = 0$, soit $x = 0$.
(b) On part de la base canonique usuelle $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ et $k = (0,0,1)$ et on utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram pour trouver la nouvelle base (e_1, e_2, e_3). Il est clair que $< i, j >= 0$, $\|i\| = \|j\| = 1$, donc $e_1 = i$ et $e_2 = j$. Ensuite $< e_1, k >=< e_2, k >= 1$ donc $k- < e_1, k > e_1- < e_2, k > e_2 = (-1,-1,1)$ et ainsi $e_3 = (-1,-1,1)/\|(-1,-1,1)\| = (-1,-1,1)$.
(c) Soit (f_1, f_2, f_3) cette base duale. On a $(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)e_1 + (x_2 + x_3)e_2 + x_3e_3$, donc d'après la définition de la base duale, on a facilement $f_1(x, x_2, x_3) = x_1 + x_3$ et $f_2(x, x_2, x_3) = x_2 + x_3$ et $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3$.
(d) F n'est pas un sev de E car $e_1 \in F$ mais $2e_1$ n'appartient pas à F (puisque $\|2e_1\| = 2$). On a e_1, e_2 et e_3 qui appartiennent à F donc comme $F^\perp = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)^\perp = E^\perp = \{0_E\}$ (puisque (e_1, e_2, e_3) base de E).
(e) f est une forme linéaire sur E car f est à valeurs dans $\mathbf{R}$ et $f(\lambda x + \mu y) = -2 < x_0, \lambda x + \mu y >= -2\lambda < x_0, x > -2\mu < x_0, y >= \lambda f(x) + \mu f(y)$ pour tout $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.
Pour $(x_1, x_2, x_3) \in E$, on a $f(x_1, x_2, x_3) = -2(x_1 + x_2 + x_1 + x_3 + x_2 + x_3 + 3x_3) = -2(2x_1 + 2x_2 + 5x_3)$. Donc $f = -2(2f_1 + 2f_2 + f_3)$: les coordonnées de f dans e^* sont $(-4,-4,-2)$.
(f) $G = \ker f$ et comme f est non-nulle, G est un hyperplan, donc $\dim G = 2$.
On peut écrire que $G = \{x_0\}^\perp$ donc $G^\perp = \text{Vect}(x_0)$.
(g) On a $P_G = Id - P_{G^\perp}$. Or $P_{G^\perp}(x) =< x, x_0' > x_0'$, où $x_0' = x_0/\|x_0\| = x_0/3$. Soit $x = x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3$. Alors $< x, x_0' >= \frac{1}{3}\big(x_1' < e_1, x_0 > + x_2' < e_2, x_0 > + x_3' < e_3, x_0 > \big) = \frac{1}{3}\big(2x_1' + 2x_2' + x_3'\big)$ et comme $x_0' = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 + e_3)$ on a $P_G(x) = x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3 - \frac{1}{9}(2x_1' + 2x_2' + x_3')(2e_1 + 2e_2 + e_3) = \frac{1}{9}\big((5x_1' - 4x_2' - 2x_3')e_1 + (-4x_1' + 5x_2' - 2x_3')e_2 + (-2x_1' - 2x_2' + 8x_3')e_3\big)$ et ainsi la matrice de P_G dans e est:

$$\text{Mat}(P_G, e) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

(h) Soit x_2 un vecteur de G tel que $< x_1, x_2 >= 0$ et $< x_2, x_2 >= 1$. Alors $P_H(x) =< x, x_1 > x_1$ et $P_G(x) =< x, x_1 > x_1 + < x, x_2 > x_2$. Donc $P_H(P_G(x)) =< P_G(x), x_1 > x_1 =<< x, x_1 > x_1 + < x, x_2 > x_2, x_1 > x_1 =< x, x_1 >< x_1, x_1 > x_1 + < x, x_2 >< x_1, x_2 > x_2 =< x, x_1 > x_1 = P_H(x)$. De même, $P_G(P_H(x)) =< P_H(x), x_1 > x_1 + < P_H(x), x_2 > x_2 =<< x, x_1 > x_1, x_1 > x_1 = P_H(x)$ car $< P_H(x), x_2 >= 0$. $\square$