Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2012 − 2013

Algèbre S4

Examen de seconde session, avril 2013

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(10 points)** Soit E l'espace vectoriel composé des fonctions de classe continue sur $[-1,1]$ et pour $j \in \mathbf{N}$, e_j la fonction telle que $e_j(x) = \cos(\pi j x)$. Soit $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire sur E tel que pour $f, g \in E$, $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

   (a) Pour $a, b \in \mathbf{R}$, montrer que $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$ **(1 pt)**.

   (b) Montrer que la famille $(e_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de E **(1.5 pts)**. En déduire une famille orthonormale $(e'_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de E **(0.5 pts)**.

   (c) Soit $F_n = \{x \in [-1,1] \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j \cos(\pi j x), (a_0, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}\}$. Montrer que F_n est un sous-espace vectoriel de E dont on précisera la dimension **(1 pt)**.

   (d) Pour f une fonction quelconque de E, déterminer à l'aide des (e'_j) la projection orthogonale $P_{F_n}(f)$ de f sur F_n **(1 pt)**. Déterminer $\|P_{F_n}(f)\|^2$ en fonction de f et des e'_j **(1 pt)**.

   (e) Soit g la fonction telle que $g(x) = \cos^2(\pi x)$ pour $x \in [-1,1]$. Que vaut $P_{F_n}(f)$ pour $n = 0$ **(1 pt)**, puis pour $n \geq 2$ **(1 pt)**?

   (f) On peut montrer (ne pas le faire!) que si f est une fonction paire de E, alors $\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|P_{F_n}(f)\|^2$. Utiliser ce résultat pour la fonction $x \in [-1,1] \mapsto |x|$ et en déduire une série bien connue **(2 pts)**.

2. **(13 points)** Soit $E = \mathbf{R}^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et soit f_1 et f_2 deux formes linéaires non nulles sur E. Pour $x, y \in E$, on note
$$\psi(x,y) = f_1(x)f_2(y) + f_2(x)f_1(y).$$

   (a) Montrer que ψ est une forme bilinéaire symétrique **(1 pt)**. Donner la forme quadratique Φ associée à ψ en fonction de f_1 et f_2 **(0.5 pts)**.

   (b) Rappeler la nature et la dimension de $\ker(f_1)$ **(0.5 pts)**.

   (c) On suppose que $\ker(f_1) = \ker(f_2)$. Soit $a \in E$ avec $a \notin \ker(f_1)$. Pour $x \in E$, montrer que $y = x - a\,\frac{f_1(x)}{f_1(a)} \in \ker(f_1)$ **(1 pt)**. Que peut-on alors dire de $f_2(y)$? **(0.5 pts)** En déduire que f_1 et f_2 sont colinéaires **(1 pt)**.

   (d) Montrer que si $\ker(f_1) = \ker(f_2)$ alors la signature de Φ vaut $(1,0)$ ou $(0,1)$ **(1.5 pts)**.

   (e) On suppose que $\ker(f_1) \neq \ker(f_2)$. Montrer que $\ker(f_1) + \ker(f_2) = E$ **(1 pt)**. En déduire que $\dim\big(\ker(f_1) \cap \ker(f_2)\big) = n - 2$ **(1 pt)**.

(f) On se place ici dans le cas où $n = 2$ et avec l'exemple suivant: pour $(x_1, x_2) \in E$, on pose $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ et $f_2(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$. A-t-on $\ker(f_1) = \ker(f_2)$ **(0.5 pts)**? Déterminer la matrice de ψ dans la base canonique de E **(0.5 pts)**. En déduire la signature de Φ en diagonalisant cette matrice **(1.5 pts)**. Déterminer les vecteurs isotropes de Φ **(0.5 pts)**.

(g) On reprend maintenant le cas général où $n \geq 2$ et $\ker(f_1) \neq \ker(f_2)$. On note $g_1 = f_1 + f_2$ et $g_2 = f_1 - f_2$. Montrer que g_1 et g_2 sont deux formes linéaires non nulles et non proportionnelles **(1 pt)**. Ecrire Φ à l'aide de g_1 et g_2 **(0.5 pts)** et en déduire que la signature de Φ est $(1, 1)$ **(0.5 pts)**.