Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2012 – 2013

Algèbre S4

Examen de seconde session, avril 2013

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(10 points)** Soit E l'espace vectoriel composé des fonctions de classe continue sur $[-1,1]$ et pour $j \in \mathbf{N}$, e_j la fonction telle que $e_j(x) = \cos(\pi j x)$. Soit $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire sur E tel que pour $f, g \in E$, $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

   (a) Pour $a, b \in \mathbf{R}$, montrer que $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$ **(1 pt)**.

   (b) Montrer que la famille $(e_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de E **(1.5 pts)**. En déduire une famille orthonormale $(e'_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de E **(0.5 pts)**.

   (c) Soit $F_n = \{x \in [-1,1] \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j \cos(\pi j x), (a_0, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}\}$. Montrer que F_n est un sous-espace vectoriel de E dont on précisera la dimension **(1 pt)**.

   (d) Pour f une fonction quelconque de E, déterminer à l'aide des (e'_j) la projection orthogonale $P_{F_n}(f)$ de f sur F_n **(1 pt)**. Déterminer $\|P_{F_n}(f)\|^2$ en fonction de f et des e'_j **(1 pt)**.

   (e) Soit g la fonction telle que $g(x) = \cos^2(\pi x)$ pour $x \in [-1,1]$. Que vaut $P_{F_n}(f)$ pour $n = 0$ **(1 pt)**, puis pour $n \geq 2$ **(1 pt)**?

   (f) On peut montrer (ne pas le faire!) que si f est une fonction paire de E, alors $\|f\|^2 = \lim_{n \to \infty} \|P_{F_n}(f)\|^2$. Utiliser ce résultat pour la fonction $x \in [-1,1] \mapsto |x|$ et en déduire une série bien connue **(2 pts)**.

Proof. (a) On utilise par exemple $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
(b) On doit calculer $< e_i, e_j >= \int_{-1}^{1} \cos(\pi i x)\cos(\pi j x)dx = \int_0^1 \cos(\pi(i+j)x) + \cos(\pi(i-j)x)dx$ grâce au (a). Si $i \neq j$, alors $< e_i, e_j >= \frac{1}{\pi(i+j)} [\sin(\pi(i+j)x]_0^1 + \frac{1}{\pi(i-j)} [\sin(\pi(i-j)x]_0^1 = 0$. Donc la famille est bien orthogonale. Si on calcule $\|e_i\|^2 =< e_i, e_i >$ avec ce qui précède on a $\|e_i\|^2 = 1$ si $i \geq 1$, et $\|e_0\|^2 = \int_{-1}^{1} dt = 2$. Aussi la famille (e'_i) telle que $e'_0 = e_0/\sqrt{2}$ et $e'_i = e_i$ pour $i \in \mathbf{N}$ est bien orthonormale.
(c) $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, \cdots, e_n)$ donc F_n est un sous-espace vectoriel de E (car (e_i) famille de E) et comme (e_i) est une famille orthogonale donc libre alors $\dim(F_n) = n+1$.
(d) D'après le cours $P_{F_n}(f) = \sum_{i=0}^{n} < f, e'_i > e'_i$ car $(e'_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de F_n.
On a ainsi $\|P_{F_n}(f)\|^2 = \sum_{i=0}^{n} < f, e'_i >^2$.
(e) On a $P_{F_0}(f) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos^2(\pi x)dx = \frac{1}{2}$.
On peut aussi écrire que $\cos^2(\pi x) = \frac{1}{2}(\cos(2\pi x) + 1)$ donc $P_{F_n}(f) = \frac{1}{2}(\cos(2\pi x) + 1)$ pour $n \geq 2$.
(f) Pour $f(x) = |x|$, on a $< f, e'_0 >= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 x dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $< f, e'_i >= 2\int_0^1 x \cos(\pi i x)dx = \frac{2}{i\pi}\Big([x \sin(piix)]_0^1 - \int_0^1 \sin(piix)dx\Big) = \frac{2}{(i\pi)^2}\Big([-\cos(piix)]_0^1\Big) = \frac{4}{(i\pi)^2}$. Par suite, on en déduit que $\frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} = \int_{-1}^{1} |x|^2 dx = \frac{2}{3}$. On en déduit donc que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

□

2. **(13 points)** Soit $E = \mathbf{R}^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et soit f_1 et f_2 deux formes linéaires non nulles sur E. Pour $x, y \in E$, on note
$$\psi(x,y) = f_1(x)f_2(y) + f_2(x)f_1(y).$$
   (a) Montrer que ψ est une forme bilinéaire symétrique **(1 pt)**. Donner la forme quadratique Φ associée à ψ en fonction de f_1 et f_2 **(0.5 pts)**.
   (b) Rappeler la nature et la dimension de $\ker(f_1)$ **(0.5 pts)**.
   (c) On suppose que $\ker(f_1) = \ker(f_2)$. Soit $a \in E$ avec $a \notin \ker(f_1)$. Pour $x \in E$, montrer que $y = x - a\,\frac{f_1(x)}{f_1(a)} \in \ker(f_1)$ **(1 pt)**. Que peut-on alors dire de $f_2(y)$? **(0.5 pts)** En déduire que f_1 et f_2 sont colinéaires **(1 pt)**.
   (d) Montrer que si $\ker(f_1) = \ker(f_2)$ alors la signature de Φ vaut $(1,0)$ ou $(0,1)$ **(1.5 pts)**.
   (e) On suppose que $\ker(f_1) \neq \ker(f_2)$. Montrer que $\ker(f_1) + \ker(f_2) = E$ **(1 pt)**. En déduire que $\dim(\ker(f_1) \cap \ker(f_2)) = n - 2$ **(1 pt)**.
   (f) On se place ici dans le cas où $n = 2$ et avec l'exemple suivant: pour $(x_1, x_2) \in E$, on pose $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ et $f_2(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$. A-t-on $\ker(f_1) = \ker(f_2)$ **(0.5 pts)**? Déterminer la matrice de ψ dans la base canonique de E **(0.5 pts)**. En déduire la signature de Φ en diagonalisant cette matrice **(1.5 pts)**. Déterminer les vecteurs isotropes de Φ **(0.5 pts)**.
   (g) On reprend maintenant le cas général où $n \geq 2$ et $\ker(f_1) \neq \ker(f_2)$. On note $g_1 = f_1 + f_2$ et $g_2 = f_1 - f_2$. Montrer que g_1 et g_2 sont deux formes linéaires non nulles et non proportionnelles **(1 pt)**. Ecrire Φ à l'aide de g_1 et g_2 **(0.5 pts)** et en déduire que la signature de Φ est $(1,1)$ **(0.5 pts)**.

Proof. (a) On a bien $\psi(x,y) = \psi(y,x)$ pour tout $(x,y) \in E^2$. De plus $\psi(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = f_1(x)f_2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + f_2(x)f_1(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = f_1(x)\big(\lambda_1 f_2(y_1) + \lambda_2 f(y_2)\big) + \big(\lambda_1 f_1(y_1) + \lambda_2 f_1(y_2)\big)f_2(x) = \lambda_1\psi(x, y_1) + \lambda_2\psi(x, y_2)$ pour tout $(x, y_1, y_2) \in E^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$, car f_1 et f_2 sont des applications linéaires. Donc ψ est bien une forme bilinéaire symétrique.
On a $\Phi(x) = 2f_1(x)f_2(x)$ pour tout $x \in E$.
(b) Comme f_1 est une forme linéaire non nulle, on sait que $\ker f_1$ est un hyperplan de dimension $n-1$.
(c) Il suffit de montrer que $f_1(y) = 0$. Or $f_1(y) = f_1(x) - f_1(a)\frac{f_1(x)}{f_1(a)} = f_1(x) - f_1(x) = 0$.
Comme $\ker(f_1) = \ker(f_2)$, alors si $y \in \ker(f_1)$ alors $y \in \ker(f_2)$. Donc $f_2(y) = 0$. Or $f_2(y) = f_2(x) - f_2(a)\frac{f_1(x)}{f_1(a)}$. Donc $f_2(x) - f_2(a)\frac{f_1(x)}{f_1(a)} = 0$, donc pour tout $x \in E$, $f_2(x) = \frac{f_2(a)}{f_1(a)}\,f_1(x)$, donc f_1 et f_2 sont proportionnelles (ou colinéaires).
(d) Avec ce qui précède, $\Phi(x) = 2f_1(x)\frac{f_2(a)}{f_1(a)}\,f_1(x) = C\,f_1^2(x)$, où $C \in \mathbf{R}^*$ et f_1 est une forme linéaire non nulle. D'après le cours, on en déduit que la signature de Φ est $(1,0)$ si $C > 0$ et $(0,1)$ si $C < 0$.
(e) Si $\ker(f_1) \neq \ker(f_2)$, alors il existe $b \in \ker(f_2)$, $b \neq 0_E$, tel que $b \in \ker(f_2)$ et $b \notin \ker(f_1)$. Donc $\ker(f_1) + \mathrm{Vect}(b) \subset \ker(f_1) + \ker(f_2)$. Mais comme $\dim(\ker(f_1)) = n-1$ et $b \notin \ker(f_1)$ on a $\dim(\ker(f_1) + \mathrm{Vect}(b)) = n = \dim(E)$. Le seul sous-espace vectoriel de dimension n inclus dans E étant E lui-même, on a bien $E \subset \ker(f_1) + \ker(f_2)$ soit $\ker(f_1) + \ker(f_2) = E$.
On sait que $\dim(\ker(f_1) + \ker(f_2)) + \dim(\ker(f_1) \cap \ker(f_2)) = \dim(\ker(f_1)) + \dim(\ker(f_2))$ car $\ker(f_1)$ et $\ker(f_2)$ sont des sous-espaces vectoriels, donc $\dim(\ker(f_1) \cap \ker(f_2)) = (n-1) + (n-1) - n = n - 2$.
(f) On a f_1 et f_2 qui ne sont pas colinéaires, donc $\ker(f_1) \notin \ker(f_2)$.
On a $\Phi(x) = 2(x_1 + x_2)(x_1 - 2x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$, donc la matrice de ψ dans la base canonique de E est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.
On peut chercher les valeurs propres de cette matrice et on a $\lambda_1 + \lambda_2 = -2$, $\lambda_1\lambda_2 = -10$: on en déduit que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ (ou l'inverse): la signature de Φ est $(1,1)$.
Les vecteurs isotropes de Φ vérifient $f_1(x) = 0$ ou $f_2(x)$, ils appartiennent donc à $\ker(f_1) \cup \ker(f_2)$.
(g) On sait qu'une combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire: g_1 et g_2 sont bien des formes linéaires. De plus ce sont des formes linéaires non nulles car sinon cela signifierait que $f_1 = f_2$ ou $f_1 = -f_2$ ce qui n'est pas possible car on a supposé que $\ker(f_1) \neq \ker(f_2)$ donc f_1 et f_2 non proportionnelles. Si g_1 et g_2 sont colinéaires, alors $f_1 + f_2 = \alpha(f_1 - f_2)$ où $\alpha \in \mathbf{R}$, d'où $(1-\alpha)f_1 = -(1+\alpha)f_2$: donc f_1 et f_2 sont colinéaires ce qui n'est pas possible. Donc g_1 et g_2 ne sont pas colinéaires.
On montre facilement que $f_1 = (g_1 + g_2)/2$ et $f_2 = (g_1 - g_2)/2$ donc $\Phi = 2(g_1 + g_2)/2(g_1 - g_2)/2 = \frac{1}{2}g_1^2 - \frac{1}{2}g_2^2$.
Φ s'écrit donc comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires non nulles dont un coefficient est positif et l'autre négatif: la signature de Φ est $(1,1)$. □