Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2013 – 2014

Algèbre S4

Examen final, avril 2014

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(15 points)** Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$ muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $1 \leq \dim(F) \leq n-1$ et on note $F^\perp$ l'ensemble orthogonal de F dans E. Soit u un endormorphisme de E tel qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant:

$$\forall x \in F,\ u(x) = \alpha\, x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in F^\perp,\ u(x) = \beta\, x.$$

   (a) Expliquer pourquoi pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ tel que $x = x_F + x_{F^\perp}$ **(0.5pts)**. En déduire que $u(x) = \alpha\, x_F + \beta\, x_{F^\perp}$ **(0.5pts)**.

   (b) Pour $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, montrer que $u_O u = u$ **(0.5pts)**. Qu'elle est alors l'application u **(0.5pts)**?

   (c) Pour $(\alpha, \beta) = (1, -1)$, montrer que $u_O u = Id$ **(0.5pts)**. Qu'elle est alors l'application u **(0.5pts)**?

   (d) On considère maintenant (α, β) quelconque. Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés **(0.5pts)**. L'application u est-elle diagonalisable **(0.5pts)**? Suivant α et β, déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{rang}(u)$ **(1pt)**.

   (e) Montrer que $u^* = u$, où u^* désigne l'endomorphisme adjoint de u **(2pts)**.

   (f) A quelles conditions sur α et β, u est-elle une isométrie vectorielle **(1.5pts)**?

   (g) On note $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale sur E, M la matrice de u dans e et pour $x \in E$, on note X le vecteur colonne des coordonnées de x dans e. Soit $\Phi(x) = {}^tXMX$. Montrer que Φ est une forme quadratique sur E **(0.5pts)**. Déterminer la signature de Φ **(1pt)**. Si α et β sont de même signe, quels sont les vecteurs isotropes de Φ **(0.5pts)**?

   (h) On se place dans le cas où $E = \mathbf{R}^3$, $< \cdot, \cdot >$ est le produit scalaire classique de $\mathbf{R}^3$ et e est la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $f(v) = x + y + z$ pour tout $v = (x, y, z) \in E$. Montrer que f est une forme linéaire sur E **(0.5pts)**. On suppose alors que $F = \ker f$. Déterminer $\dim(F)$ **(0.5pts)**, $F^\perp$ **(1pt)**, M **(2pts)** et Φ **(0.5pts)** en fonction de α et β.

2. **(17 points)** *Dans cet exercice, on pourra utiliser les deux résultats connus: (1) si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$, alors $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = 0$ implique $f = 0$; (2) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2\pi}$.*

   Soit $E = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},$ continues sur $\mathbf{R}$ et telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) e^{-t^2/2} dt < \infty\}$.

   (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ **(0.5pts)**. Montrer que E est un espace vectoriel **(1.5pts)**.

   (b) Montrer que $\mathbf{R}[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels, est inclus dans E **(1pt)**.

(c) Pour $(f,g) \in E^2$, on note $< f,g >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t^2/2}dt$. Montrer que $< f,g >$ existe pour tout $(f,g) \in E^2$ **(1.5pts)** puis que $< \cdot,\cdot >$ est un produit scalaire sur E **(1pt)**.

(d) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, on note $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \times \frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{-x^2/2})$ (on aura ainsi $H_0(x) = e^{x^2/2} \times e^{-x^2/2}$, $H_1(x) = -e^{x^2/2} \times (e^{-x^2/2})'$, $H_2(x) = e^{x^2/2} \times (e^{-x^2/2})''$, etc..). Montrer que $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$ et $H_2(x) = x^2 - 1$ **(0.5pts)**.

(e) Montrer que pour $n \in \mathbf{N}$, $H_{n+1}(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \times \frac{\partial^n}{\partial x^n}(x\, e^{-x^2/2})$ **(0.5pts)**. En utilisant la formule de la dérivée n-ième d'un produit de deux fonctions, en déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in E$, $H_{n+1}(x) = x\, H_n(x) - n\, H_{n-1}(x)$ **(1.5pts)**. En déduire $H_3(x)$ **(0.5pts)**.

(f) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est un polynôme de degré n dont le coefficient de degré n est 1 **(1.5pts)**.

(g) Montrer que pour $1 \leq n \leq m$, $< H_n, H_m >= \int_{-\infty}^{\infty} H_n'(x) \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}(e^{-x^2/2})dx$ **(1pt)**. En itérant le procédé, en déduire que $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de E **(1.5pts)** et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|H_n\|^2 =< H_n, H_n >= \sqrt{2\pi} \times n!$ **(1.5pts)**.

(h) Pour $n \in \mathbf{N}$, déterminer une base orthonormale de $\mathbf{R}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n **(0.5pts)**.

(i) Soit $f(x) = e^x$. Montrer que $f \in E$ **(0.5pts)**. Déterminer le polynôme $P \in \mathbf{R}_1[X]$ qui minimise $\|f - P\|$ **(2pts)**.