Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2013 − 2014

Algèbre S4

Examen final, avril 2014

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(15 points)** Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$ muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $1 \leq \dim(F) \leq n-1$ et on note $F^\perp$ l'ensemble orthogonal de F dans E. Soit u un endormorphisme de E tel qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant:
$$\forall x \in F,\ u(x) = \alpha\, x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in F^\perp,\ u(x) = \beta\, x.$$
   (a) Expliquer pourquoi pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ tel que $x = x_F + x_{F^\perp}$ **(0.5pts)**. En déduire que $u(x) = \alpha\, x_F + \beta\, x_{F^\perp}$ **(0.5pts)**.
   (b) Pour $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, montrer que $u_O u = u$ **(0.5pts)**. Qu'elle est alors l'application u **(0.5pts)**?
   (c) Pour $(\alpha, \beta) = (1, -1)$, montrer que $u_O u = Id$ **(0.5pts)**. Qu'elle est alors l'application u **(0.5pts)**?
   (d) On considère maintenant (α, β) quelconque. Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés **(0.5pts)**. L'application u est-elle diagonalisable **(0.5pts)**? Suivant α et β, déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{rang}(u)$ **(1pt)**.
   (e) Montrer que $u^* = u$, où u^* désigne l'endomorphisme adjoint de u **(2pts)**.
   (f) A quelles conditions sur α et β, u est-elle une isométrie vectorielle **(1.5pts)**?
   (g) On note $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale sur E, M la matrice de u dans e et pour $x \in E$, on note X le vecteur colonne des coordonnées de x dans e. Soit $\Phi(x) = {}^tXMX$. Montrer que Φ est une forme quadratique sur E **(0.5pts)**. Déterminer la signature de Φ **(1pt)**. Si α et β sont de même signe, quels sont les vecteurs isotropes de Φ **(0.5pts)**?
   (h) On se place dans le cas où $E = \mathbf{R}^3$, $< \cdot, \cdot >$ est le produit scalaire classique de $\mathbf{R}^3$ et e est la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $f(v) = x + y + z$ pour tout $v = (x, y, z) \in E$. Montrer que f est une forme linéaire sur E **(0.5pts)**. On suppose alors que $F = \ker f$. Déterminer $\dim(F)$ **(0.5pts)**, $F^\perp$ **(1pt)**, M **(2pts)** et Φ **(0.5pts)** en fonction de α et β.

Proof. (a) On sait que comme E est dimension finie alors $E = F \oplus F^\perp$. Donc pour tout $x \in E$, x s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_F + x_{F^\perp}$.
On a donc $u(x) = u(x_F + x_{F^\perp}) = u(x_F) + u(x_{F^\perp})$ car u est linéaire. D'après la définition de u, on en déduit que $u(x) = \alpha\, x_F + \beta\, x_{F^\perp}$.

(b) Pour tout $x \in E$, on a $x = x_F + x_{F^\perp}$. D'où $u(x) = x_F$ et $u(u(x)) = u(x_F) = x_F = u(x)$.
u est la projection orthogonale de x sur F.

(c) Pour tout $x \in E$, et avec $x = x_F + x_{F^\perp}$, on a $u(x) = x_F - x_{F^\perp}$ et $u(u(x)) = u(x_F - x_{F^\perp}) = x_F - (-x_{F^\perp}) = x$.
D'où $u(u(x)) = x$.
u est la symétrie orthogonale de x sur F.

(d) Il est clair que α est une valeur propre de u ayant pour sous-espace propre F et β est une valeur propre de u ayant pour sous-espace propre $F^\perp$.
Comme $\dim(F)+\dim(F^\perp)=\dim(E)$, on en déduit que E est somme directe des sous-espaces propres de u donc u est diagonalisable.
On sait que $\ker(u)$ est le sous-espace associé à la valeur propre 0. Donc si $\alpha=0$ et $\beta\neq 0$, $\ker(u)=F$ et $\mathrm{rang}(u)=n-\dim(F)$, si $\beta=0$ et $\alpha\neq 0$, $\ker(u)=F^\perp$ et $\mathrm{rang}(u)=n-\dim(F^\perp)=\dim(F)$; si $(\alpha,\beta)=(0,0)$ alors $\ker(u)=E$ et $\mathrm{rang}(u)=0$. Dans tous les autres cas, $\ker(u)=\{0_E\}$ et $\mathrm{rang}(u)=n$.

(e) Soit $(x,y)\in E^2$, avec $x=x_F+x_{F^\perp}$ et $y=y_F+y_{F^\perp}$. On a $<u(x),y>=<\alpha\,x_F+\beta\,x_{F^\perp},y_F+y_{F^\perp}>$. En utilisant le fait que F et $F^\perp$ sont orthogonaux, donc $<x_F,y_{F^\perp}>=<x_{F^\perp},y_F>=0$, on en déduit que $<u(x),y>=\alpha<x_F+y_F>+\beta<x_{F^\perp},y_{F^\perp}>$. De la même manière $<x,u(y)>==<x_F+x_{F^\perp},\alpha\,y_F+\beta\,y_{F^\perp}>=\alpha<x_F+y_F>+\beta<x_{F^\perp},y_{F^\perp}>$. Aisni $<u(x),y>=<x,u(y)>$ pour tout $y\in E$, donc $u^*=u$.

(f) Une condition nécessaire et suffisante pour que u soit une isométrie est que $u^*=u^{-1}$. Ceci signifie déjà que α et β sont non nuls (pour que $\ker(u)=\{0\}$). Comme $u^*=u$, on doit donc avoir $u(u(x))=x$ pour tout $x\in E$. En utilisant $x=x_F+x_{F^\perp}$, et $u(x)=\alpha\,x_F+\beta\,x_{F^\perp}$, on doit avoir $\alpha^2\,x_F+\beta^2\,x_{F^\perp=}x_F+x_{F^\perp}$, donc $\alpha^2=\beta^2=1$, ou encore $\alpha=\pm1$ et $\beta=\pm1$.

(g) Φ est une forme quadratique sur E car M est une symétrique du fait que $u^*=u$.
On sait que les valeurs propres de M sont α et β, donc la signature de Φ est: $(n,0)$ si $\alpha>0$ et $\beta>0$, $(0,n)$ si $\alpha<0$ et $\beta<0$, $(\dim(F),n-\dim(F))$ si $\alpha>0$ et $\beta<0$, $(n-\dim(F),\dim(F))$ si $\beta>0$ et $\alpha<0$, $(\dim(F),0)$ si $\beta=0$ et $\alpha>0$, $(0,\dim(F))$ si $\beta=0$ et $\alpha<0$, $(n-\dim(F),0)$ si $\alpha=0$ et $\beta>0$, $(0,n-\dim(F))$ si $\alpha=0$ et $\beta<0$ et enfin $(0,0)$ si $(\alpha,\beta)=(0,0)$.
Si α et β sont de même signe, les vecteurs isotropes s'écrivent sous la forme $\alpha\sum_{i=1}^{\dim(F)}y_i^2+\beta\sum_{i=\dim(F)+1}^{n}y_i^2=0$ soit $y_i=0$ pour tout i: le seul vecteur isotrope est 0_E.

(h) On montre facilement que $f(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)=\lambda_1f(v_1)+\lambda_2f(v_2)$, donc f est une application linéaire à valeurs dans $\mathbf{R}$: c'est une forme linéaire sur E.
F est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc f est un hyperplan de E, donc de dimension 2.
Il est facile de voir que $f(v)=<(1,1,1),(x,y,z)>$ pour tout $(x,y,z)\in E$, donc comme $F=\ker(f)=\{(1,1,1)\}^\perp$ on en déduit que $F^\perp=\mathrm{Vect}((1,1,1))$.
Une base orthonormale de F est donc $\big(2^{-1/2}(1,-1,0),6^{-1/2}(1,1,-2)\big)$ et pour $F^\perp$ on choisit $3^{-1/2}(1,1,1)$. En conséquence $M=PD\,{}^tP$, soit $M=\begin{pmatrix}2^{-1/2}&6^{-1/2}&3^{-1/2}\\-2^{-1/2}&6^{-1/2}&3^{-1/2}\\0&-2\times6^{-1/2}&3^{-1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{-1/2}&-2^{-1/2}&0\\6^{-1/2}&6^{-1/2}&-2\times6^{-1/2}\\3^{-1/2}&3^{-1/2}&3^{-1/2}\end{pmatrix}$
et ainsi $M=\begin{pmatrix}(2\alpha+\beta)/3&(\beta-\alpha)/3&(\beta-\alpha)/3\\(\beta-\alpha)/3&(2\alpha+\beta)/3&(\beta-\alpha)/3\\(\beta-\alpha)/3&(\beta-\alpha)/3&(2\alpha+\beta)/3\end{pmatrix}$.
Enfin, $\Phi((x,y,z))=\frac{(2\alpha+\beta)}{3}(x^2+y^2+z^2)+\frac{2(\beta-\alpha)}{3}(xy+xz+yz)$.

□

2. **(17 points)** *Dans cet exercice, on pourra utiliser les deux résultats connus: (1) si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$, alors $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt=0$ implique $f=0$; (2) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi}$.*
Soit $E=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},$ continues sur $\mathbf{R}$ et telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)e^{-t^2/2}dt<\infty\}$.

(a) Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)$ **(0.5pts)**. Montrer que E est un espace vectoriel **(1.5pts)**.

(b) Montrer que $\mathbf{R}[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels, est inclus dans E **(1pt)**.

(c) Pour $(f,g)\in E^2$, on note $<f,g>=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t)e^{-t^2/2}dt$. Montrer que $<f,g>$ existe pour tout $(f,g)\in E^2$ **(1.5pts)** puis que $<\cdot,\cdot>$ est un produit scalaire sur E **(1pt)**.

(d) Pour tout $n\in\mathbf{N}$ et $x\in\mathbf{R}$, on note $H_n(x)=(-1)^ne^{x^2/2}\times\frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{-x^2/2})$ (on aura ainsi $H_0(x)=e^{x^2/2}\times e^{-x^2/2}$, $H_1(x)=-e^{x^2/2}\times(e^{-x^2/2})'$, $H_2(x)=e^{x^2/2}\times(e^{-x^2/2})''$, etc..). Montrer que $H_0(x)=1$, $H_1(x)=x$ et $H_2(x)=x^2-1$ **(0.5pts)**.

(e) Montrer que pour $n\in\mathbf{N}$, $H_{n+1}(x)=(-1)^ne^{x^2/2}\times\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x\,e^{-x^2/2})$ **(0.5pts)**. En utilisant la formule de la dérivée n-ième d'un produit de deux fonctions, en déduire que pour tout $n\in\mathbf{N}$ et tout $x\in E$, $H_{n+1}(x)=x\,H_n(x)-n\,H_{n-1}(x)$ **(1.5pts)**. En déduire $H_3(x)$ **(0.5pts)**.

(f) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbf{N}$, H_n est un polynôme de degré n dont le coefficient de degré n est 1 **(1.5pts)**.

(g) Montrer que pour $1 \leq n \leq m$, $< H_n, H_m >= \int_{-\infty}^{\infty} H_n'(x) \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}(e^{-x^2/2})dx$ **(1pt)**. En itérant le procédé, en déduire que $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de E **(1.5pts)** et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|H_n\|^2 =< H_n, H_n >= \sqrt{2\pi} \times n!$ **(1.5pts)**.

(h) Pour $n \in \mathbf{N}$, déterminer une base orthonormale de $\mathbf{R}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n **(0.5pts)**.

(i) Soit $f(x) = e^x$. Montrer que $f \in E$ **(0.5pts)**. Déterminer le polynôme $P \in \mathbf{R}_1[X]$ qui minimise $\|f - P\|$ **(2pts)**.

Proof. (a) On a $2(x^2 + y^2) - (x + y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0$.
Il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, que l'on sait être un espace vectoriel. Pour cela, on prend $(f_1, f_2) \in E^2$, alors $f_1 + f_2$ continue sur $\mathbf{R}$ et $\int_{-\infty}^{\infty}(f_1+f_2)^2(t)e^{-t^2/2}dt \leq 2\int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t)e^{-t^2/2}dt+2\int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t)e^{-t^2/2}dt < \infty$: donc $f_1+f_2 \in E$. De plus pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et $f \in E$, λf est continue et $\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda f)^2(t)e^{-t^2/2}dt \leq \lambda^2\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)e^{-t^2/2}dt < \infty$, soit $\lambda f \in E$. Ainsi E est bien un sous-espace vectoriel.

(b) Soit P un polynôme quelconque de $\mathbf{R}[X]$ de degré n. Alors P est continue sur $\mathbf{R}$ et $x^2P^2(x)e^{-x^2/2} \to 0$ quand $|x| \to \infty$: d'après le Théorème de comparaison avec une intégrale de Riemann, on a $\int_{-\infty}^{\infty} P^2(t)e^{-t^2/2}dt < \infty$.

(c) Il suffit de montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t^2/2}dt$ converge. On a $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, donc $\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)g(t)|e^{-t^2/2}dt \leq \frac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)e^{-t^2/2}dt + \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)e^{-t^2/2}dt\Big) < \infty$. Ainsi $< f, g >$ existe pour tout $f, g \in E$.
Il est clair que $< f, g >=< g, f >$, que $< f, \lambda_1g_1 + \lambda_2g_2 >= \lambda_1 < f, g_1 > +\lambda_2 < f, g_2 >$, que $< f, f >\geq 0$ et enfin, comme $t \in \mathbf{R} \mapsto f^2(t)e^{-t^2/2}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}$, si $< f, f >= 0$ alors $f = 0$.

(d) On a bien-sûr $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = (-1)e^{x^2/2} \times xe^{-x^2/2} = x$ et $H_2(x) = e^{x^2/2} \times (e^{-x^2/2} - x^2e^{-x^2/2}) = x^2 - 1$.

(e) On a $H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}e^{x^2/2}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\Big(\frac{\partial}{\partial x}e^{-x^2/2}\Big) = (-1)^{n+1}e^{x^2/2}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\big(-xe^{-x^2/2}\big) = (-1)^n e^{x^2/2} \times \frac{\partial^n}{\partial x^n}\big(x\,e^{-x^2/2}\big)$.
On sait que $(f\times g)^{(n)} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} f^{(p)}g^{(n-p)}$ pour f et g n-fois dérivables. On applique cela à $f(x) = x$ et $g(x) = e^{-x^2/2}$ et on a $\frac{\partial^n}{\partial x^n}\big(x\,e^{-x^2/2}\big) = \binom{n}{n-1} 1\times\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\big(e^{-x^2/2}\big)+\binom{n}{n} x\times\frac{\partial^n}{\partial x^n}\big(e^{-x^2/2}\big)$. En conséquence on obtient $H_{n+1}(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \times \Big(n\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\big(e^{-x^2/2}\big) + x\frac{\partial^n}{\partial x^n}\big(e^{-x^2/2}\big)\Big)$. Par suite, on a bien $H_{n+1}(x) = -nH_{n-1}(x) + xH_n(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$.
Ainsi pour $n = 2$, $H_3(x) = -2H_1(x) + xH_2(x) = x^3 - x - 2x = x^3 - 3x$.

(f) Soit $P(n)$ la propriété "H_n est un polynôme de degré n dont le coefficient de degré n est 1". Il est clair que $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies. Supposons que $P(n-1)$ et $P(n)$ sont vraies. Alors comme $H_{n+1}(x) = -nH_{n-1}(x) + xH_n(x)$, on a $xH_n(x)$ qui est polynôme de degré $n+1$ dont le coefficient de degré $n+1$ est 1 et $-nH_{n-1}(x)$ qui est un polynôme de degré $n-1$. Donc H_{n+1} est bien un polynôme de degré $n+1$ dont le coefficient de degré $n+1$ est 1: $P(n+1)$ est vraie donc par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(g) On a par intégration par parties, $< H_n, H_m >= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)\frac{\partial^m}{\partial x^m}\big(e^{-x^2/2}\big)dx = \Big[H_n(x)\frac{\partial^m}{\partial x^m}\big(e^{-x^2/2}\big)\Big]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} H_n'(x)\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}\big(e^{-x^2/2}\big)dx$. Comme $\frac{\partial^m}{\partial x^m}\big(e^{-x^2/2}\big)$ s'écrit comme un polynôme multiplié par $e^{-x^2/2}$, on en déduit que $H_n(x)\frac{\partial^m}{\partial x^m}\big(e^{-x^2/2}$ est un polynôme multiplié par $e^{-x^2/2}$, donc tend vers 0 en $\pm\infty$ et ainsi $\Big[H_n(x)\frac{\partial^m}{\partial x^m}\big(e^{-x^2/2}\big)\Big]_{-\infty}^{\infty} = 0$. D'où le résultat.
On peut continuer les IPP et ainsi $< H_n, H_m >= \int_{-\infty}^{\infty} H_n''(x)\frac{\partial^{m-2}}{\partial x^{m-2}}\big(e^{-x^2/2}\big)dx = \cdots = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x)\frac{\partial^{m-n}}{\partial x^{m-n}}\big(e^{-x^2/2}\big)dx$.
Donc si $m > n$, on peut même continuer encore le procédé et on a $< H_n, H_m >= \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n+1)}(x)\frac{\partial^{m-n-1}}{\partial x^{m-n-1}}\big(e^{-x^2/2}\big)dx = 0$ car H est de degré n donc $H^{(n+1)} = 0$. Ainsi (H_n) est une famille orthogonale.
Si $m = n$, alors $< H_n, H_n >= \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x)\frac{\partial^0}{\partial x^0}\big(e^{-x^2/2}\big)dx = n!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}\,n!$ puisque $H_n = x^n + \cdots$, $H_n'(x) = nx^{n-1} + \cdots$, $H_n''(x) = n(n-1)x^{n-2} + \cdots$, etc.., et donc $H_n(x) = n!$.

(h) Il est clair que si on pose $H_p' = H_p/(\sqrt{2\pi}\,n!)^{-1/2}$ alors $(H_0', H_1', \cdots, H_n')$ est une base orthnormale de $\mathbf{R}_n[X]$.

(i) On a bien $x \to e^x$ qui est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et $x^2e^{2x}e^{-x^2/2} \to 0$ pour $x \to \pm\infty$ donc on a bien $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2x}e^{-x^2/2}dx < \infty$ et $f \in E$.
Il revient de calculer $< f, H_0' >$ et $< f, H_1' >$, puisque le projeté orthogonal de f sur $\mathbf{R}_1[X]$ vaut $P_{R_1[X]}(f) =< f, H_0' > H_0'+ < f, H_1' > H_1' = (2\pi)^{-1/2}\big(< f, H_0 > H_0+ < f, H_1 > H_1\big)$. Mais $< f, H_0 >= \int_{-\infty}^{\infty} e^xe^{-x^2/2}dx = e^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-1)^2/2}dx = e^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy = e^{1/2}\sqrt{2\pi}$. De même, on obtient que $< f, H_1 >= \int_{-\infty}^{\infty} xe^xe^{-x^2/2}dx = e^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-1)^2/2}dx = e^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}(y+1)e^{-y^2/2}dy = e^{1/2}\sqrt{2\pi}$. Ainsi $P_{R_1[X]}(f) = e^{1/2}(1+x)$ est le polynôme de $\mathbf{R}_1[X]$ qui minimise $\|f - P\|$.

□