Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2014 – 2015

Algèbre S4

Correction de l'examen final, mai 2015

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(13 points)** Soit n un entier plus grand ou égal à 2 et $E = \mathbf{R}^n$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, on note $\Phi(x) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$. On vérifiera notamment que pour $n = 2$, $\Phi(x) = 2x_1x_2$.
   (a) Montrer que Φ est une forme quadratique, donner sa forme bilinéaire ϕ associée et sa matrice M dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ **(1.5pts)**.
   (b) Dans le cas où $n = 2$, montrer que ϕ n'est pas un produit scalaire **(1pt)**.
   (c) On se replace dans le cas général où $n \geq 2$. Calculer $M + I_n$, où I_n est la matrice identité de taille n et en déduire les 2 valeurs propres de M et leur multiplicité. Quelle est la signature de Φ? La forme bilinéaire ϕ est-elle un produit scalaire? **(4.5pts)**.
   (d) Déterminer une base orthonormale dans laquelle diagonaliser M. En déduire une écriture de Φ sous la forme d'une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes **(3pts)**.
   (e) Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, soit $\Phi_\alpha(x) = \Phi(x) + \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2$. Montrer que Φ_α est une forme quadratique en déterminant M_α sa matrice associée dans la base canonique. Déterminer une factorisation du polynôme caractéristique de M_α. En déduire, en fonction de α, la signature de Φ_α **(3pts)**.

2. **(15 points)** Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrés d'ordre n à coefficients réels. Soit A une matrice symétrique définie positive (toutes ses valeurs propres sont strictement positives). On note I_n la matrice identité de E.
   (a) Rappeler pourquoi on peut écrire $A = P\,D\,{}^tP$ où D est une matrice diagonale composée des valeurs propres de A et P une matrice que l'on définira **(0.5pts)**.
   (b) Pour $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$, avec $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul, démontrer que ${}^tX\,A\,X > 0$ **(1pt)**.
   (c) Déterminer explicitement une matrice symétrique notée $A^{1/2}$ telle que $A = A^{1/2}A^{1/2}$ (on pourra utiliser P). En justifiant son existence, déterminer également une matrice $A^{-1/2}$ telle que $A^{1/2}A^{-1/2} = I_n$ **(3pts)**.
   (d) Soit B une matrice symétrique définie positive de E. On désire montrer que AB est aussi une matrice définie positive. Montrer que $A\,B$ et $A^{1/2}BA^{1/2}$ ont le même polynôme caractéristique. Montrer que la forme quadratique de matrice $A^{1/2}\,B\,A^{1/2}$ est définie positive. Conclure **(3.5pts)**.
   (e) Pour $M, N \in E$, soit $< M, N >_A = \mathrm{Trace}({}^tM\,A\,N)$. Montrer que $< M, N >_A$ est une forme bilinéaire symétrique de E. Si $M = (X_1, \cdots, X_n)$ et $N = (Y_1, \cdots, Y_n)$, où $X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n$ sont $2n$ vecteurs colonne de $\mathbf{R}^n$, montrer que $< M, N >_A = \sum_{i=1}^n {}^tX_i\,A\,Y_i$. En déduire que $< \cdot, \cdot >_A$ est un produit scalaire sur E, dont on notera la norme associée $\| \cdot \|_A$ **(2.5pts)**.
   (f) Soit $(B_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la famille de matrices de E telle que pour $1 \leq i, j \leq n$, B_{ij} est constituée de 0 partout sauf en la coordonnée (i, j) où il y a un 1. Montrer que $(B_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base orthonormale de E pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >_{I_n}$. En utilisant $A^{-1/2}$, en déduire une base orthonormale de E pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >_A$ **(2pts)**.
   (g) Soit $D = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbf{R}\}$. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension. Pour $M \in E$, montrer que $\min_{d \in D} \|M - d\|_A = \Big\| M - \dfrac{\mathrm{Trace}(AM)}{\mathrm{Trace}(A)} I_n \Big\|_A$ **(3pts)**.