Licence M.A.S.S. deuxième année 2014 – 2015

Algèbre S4

Correction de l'examen final, mai 2015

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(13 points)** Soit n un entier plus grand ou égal à 2 et $E = \mathbf{R}^n$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, on note $\Phi(x) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$. On vérifiera notamment que pour $n = 2$, $\Phi(x) = 2x_1x_2$.

   (a) Montrer que Φ est une forme quadratique, donner sa forme bilinéaire ϕ associée et sa matrice M dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ **(1.5pts)**.

   (b) Dans le cas où $n = 2$, montrer que ϕ n'est pas un produit scalaire **(1pt)**.

   (c) On se replace dans le cas général où $n \geq 2$. Calculer $M + I_n$, où I_n est la matrice identité de taille n et en déduire les 2 valeurs propres de M et leur multiplicité. Quelle est la signature de Φ? La forme bilinéaire ϕ est-elle un produit scalaire? **(4.5pts)**

   (d) Déterminer une base orthonormale dans laquelle diagonaliser M. En déduire une écriture de Φ sous la forme d'une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes **(3pts)**.

   (e) Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, soit $\Phi_\alpha(x) = \Phi(x) + \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2$. Montrer que Φ_α est une forme quadratique en déterminant M_α sa matrice associée dans la base canonique. Déterminer une factorisation du polynôme caractéristique de M_α. En déduire, en fonction de α, la signature de Φ_α **(3pts)**.

Proof. (a) On peut écrire que $\Phi(x) = {}^t x \, M \, x$ où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc Φ est une forme quadratique, M sa matrice associée dans la base canonique et $\phi(x, y) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i y_j$.

(b) On a alors $\phi(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$ d'où $\phi(x, x) = 2x_1x_2 = \frac{1}{2}\big((x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2\big)$. D'où pour $x = (1, -1)$, $\phi(x, x) < 0$, donc ϕ ne peut pas être un produit scalaire (la propriété 3 n'est pas vérifiée).

(c) On a $M + I_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. De ceci on en déduit que -1 est une valeur propre de M car $\det(M + I_n) = 0$.

Le sous-espace propre associé à -1 est $E_{-1} = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n\}$ qui est un hyperplan de E car noyau de la forme linéaire $f(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Donc la multiplicité de -1 est $(n - 1)$ dimension de cet hyperplan. On sait que M est symétrique donc diagonalisable. Pour déterminer sa dernière valeur propre qui sera de multiplicité 1, on utilise la trace de M qui est égale à la somme des valeurs propres, donc la seconde valeur propre est $n - 1$.
De ceci on en déduit que $\text{Signature}(M) = (1, n - 1)$.
La forme bilinéaire ϕ n'est donc pas un produit scalaire car pour cela il aurait fallu que la signature de Φ soit $(n, 0)$.

(d) On comme par trouver un vecteur propre normé associé à la valeur propre $(n - 1)$. Celui-ci devra être orthogonal à l'hyperplan E_{-1} qui est le noyau de $f(x) =< x, (1, 1, \cdots, 1) >$ où $< \cdot, \cdot >$ est le produit scalaire euclidien classique, donc $E_{-1} = (1, 1, \cdots, 1)^\perp$. On en déduit donc qu'un vecteur propre normé associé à la valeur propre $(n - 1)$ est $e'_n = (1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}, \cdots, 1/\sqrt{n})$.
Pour trouver une base orthnormale de E_{-1}, on peut considérer la famille orthogonale $e_1 = (1, -1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (1, 1, -2, 0, \cdots, 0)$, ..., $e_k = (1, 1, \cdots, 1, -k, 0, \cdots, 0)$, ..., $e_{n-1} = (1, \cdots, 1, -(n-1))$. On doit alors normer ces

vecteurs, et on obtient: $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,\cdots,0)$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0,\cdots,0)$, ..., $e'_k = \frac{1}{\sqrt{k^2+k}}(1,1,\cdots,1,-k,0,\cdots,0)$, ..., $e'_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)^2+(n-1)}}(1,\cdots,1,-(n-1))$.
La base orthonormale $(e'_1,\cdots,e'_n)$ est une base dans laquelle on peut diagonaliser M.
De ceci on en déduit que $\Phi(x) = (n-1) < x, e'_n >^2 - \sum_{i=1}^{n-1} < x, e'_i >^2$, les formes linéaires $< x, e'_j >$ étant bien indépendantes car les e'_j sont orthogonaux.

(e) La matrice $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ et $\Phi_\alpha(x) = {}^t x\, M_\alpha\, x$ donc Φ_α est bien une forme quadratique de E.
On a vu que le polynôme caractéristique de M est $\chi(\lambda) = (-1-\lambda)^{n-1}(n-1-\lambda)$. Celui-ci se calcule à partir du déterminant de la matrice $M_{(-\lambda)}$. De la même manière le polynôme caractéristique de M_α se calcule avec le déterminant de $M_{\alpha-\lambda}$ et vaut $(-1+\alpha-\lambda)^{n-1}(n-1+\alpha-\lambda)$. On en déduit que les valeurs propres de M_α sont $\alpha-1$, de multiplicité $n-1$ et $n-1+\alpha$ racine simple. On en déduit que la signature de Φ_α est $(n,0)$ si $\alpha > -1$, $(1,0)$ si $\alpha = 1$, $(1, n-1)$ si $1-n < \alpha < 1$, $(0, n-1)$ si $\alpha = 1-n$ et $(0,n)$ si $\alpha < 1-n$.

□

2. **(15 points)** Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrés d'ordre n à coefficients réels. Soit A une matrice symétrique définie positive (toutes ses valeurs propres sont strictement positives). On note I_n la matrice identité de E.

   (a) Rappeler pourquoi on peut écrire $A = P\,D\,{}^tP$ où D est une matrice diagonale composée des valeurs propres de A et P une matrice que l'on définira **(0.5pts)**.

   (b) Pour $X = {}^t(x_1,\cdots,x_n)$, avec $(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul, démontrer que ${}^tX\,A\,X > 0$ **(1pt)**.

   (c) Déterminer explicitement une matrice symétrique notée $A^{1/2}$ telle que $A = A^{1/2}A^{1/2}$ (on pourra utiliser P). En justifiant son existence, déterminer également une matrice $A^{-1/2}$ telle que $A^{1/2}A^{-1/2} = I_n$ **(3pts)**.

   (d) Soit B une matrice symétrique définie positive de E. On désire montrer que AB est aussi une matrice définie positive. Montrer que $A\,B$ et $A^{1/2}BA^{1/2}$ ont le même polynôme caractéristique. Montrer que la forme quadratique de matrice $A^{1/2}\,B\,A^{1/2}$ est définie positive. Conclure **(3.5pts)**.

   (e) Pour $M, N \in E$, soit $< M, N >_A = \text{Trace}({}^tM\,A\,N)$. Montrer que $< M, N >_A$ est une forme bilinéaire symétrique de E. Si $M = (X_1,\cdots,X_n)$ et $N = (Y_1,\cdots,Y_n)$, où $X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n$ sont $2n$ vecteurs colonne de $\mathbf{R}^n$, montrer que $< M, N >_A = \sum_{i=1}^n {}^tX_i\,A\,Y_i$. En déduire que $< \cdot,\cdot >_A$ est un produit scalaire sur E, dont on notera la norme associée $\|\cdot\|_A$ **(2.5pts)**.

   (f) Soit $(B_{ij})_{1\le i,j\le n}$ la famille de matrices de E telle que pour $1 \le i,j \le n$, B_{ij} est constituée de 0 partout sauf en la coordonnée (i,j) où il y a un 1. Montrer que $(B_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est une base orthonormale de E pour le produit scalaire $< \cdot,\cdot >_{I_n}$. En utilisant $A^{-1/2}$, en déduire une base orthonormale de E pour le produit scalaire $< \cdot,\cdot >_A$ **(2pts)**.

   (g) Soit $D = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbf{R}\}$. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension. Pour $M \in E$, montrer que $\min_{d\in D} \|M-d\|_A = \Big\|M - \frac{\text{Trace}(AM)}{\text{Trace}(A)} I_n\Big\|_A$ **(3pts)**.

Proof. (a) A est une matrice symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormale. D'où $A = P\,D\,{}^tP$ avec P la matrice de changement de base, qui est une matrice orthogonale et D la matrice diagonale composée des valeurs propres de A.

(b) On a ${}^tX\,A\,X = {}^tX\,P\,D\,{}^tP\,X = {}^tY\,D\,Y$ avec $Y = {}^tP\,X$. Mais si $Y = {}^t(y_1,\cdots,y_n)$ alors ${}^tY\,D\,Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0$ avec les λ_i valeurs propres de A toutes strictement positives, dès que $Y \neq 0$, donc $X \neq 0$.

(c) Si on considère $D^{1/2}$ la matrice diagonale contenant toutes les racines des valeurs propres de A, on vérifie que $(P\,D^{1/2}\,{}^tP)\,(P\,D^{1/2}\,{}^tP) = P\,D^{1/2}\,D^{1/2}\,{}^tP$ car ${}^tP\,P = I_n$ et comme $D^{1/2}\,D^{1/2} = D$, on a $(P\,D^{1/2}\,{}^tP)\,(P\,D^{1/2}\,{}^tP) = P\,D\,{}^tP = A$, donc on peut choisir $A^{1/2} = P\,D^{1/2}\,{}^tP$.
Les valeurs propres de $A^{1/2}$ sont les racines des valeurs propres de A et comme elles sont toutes strictement positives, la matrice $A^{1/2}$ est symétrique, définie positive et donc inversible. On trouve alors $A^{-1/2} = P\,D^{-1/2}\,{}^tP$ où $D^{-1/2}$ est la matrice diagonale composée des valeurs propres de A à la puissance $-1/2$.

(d) On a $\det(A^{1/2}BA^{1/2} - \lambda I_n) = \det((A^{1/2}B - \lambda A^{-1/2})A^{1/2}) = \det(A^{1/2}(A^{1/2}B - \lambda A^{-1/2}))$ car $\det(MN) = \det(NM)$ pour toutes matrices carrés M et N de E, donc $\det(A^{1/2}BA^{1/2} - \lambda I_n) = \det(AB - \lambda I_n)$: les deux polynômes caractéristiques sont égaux.
Pour X vecteur colonne, on a ${}^tXA^{1/2}BA^{1/2}X = {}^t(A^{1/2}X)B(A^{1/2}X) = {}^tY\,B\,Y$ où $Y = A^{1/2}X$. Mais comme B est une matrice définie positive, alors ${}^tY\,B\,Y > 0$ pour tout Y, donc ${}^tXA^{1/2}BA^{1/2}X > 0$ pour tout X (car

$X = A^{-1/2}Y$) et ainsi on en déduit que $A^{1/2}BA^{1/2}$ est une matrice symétrique définie positive. En conclusion, comme les deux polynômes caractéristiques sont égaux, les valeurs propres sont les mêmes et comme $A^{1/2}BA^{1/2}$ est symétrique, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont toutes strictement positives d'après ce qui précède. Ainsi, il en est de même pour AB et AB est donc définie positive (mais pas forcément symétrique).

(e) Avec les propriétés de la trace, notamment $\mathrm{Trace}(M) = \mathrm{Trace}({}^tM)$, $\mathrm{Trace}(MN) = \mathrm{Trace}(NM)$ et $\mathrm{Trace}(M+N) = \mathrm{Trace}(M) + \mathrm{Trace}(N)$, on a:

- $< N, M >_A = \mathrm{Trace}({}^tN\,A\,M) = \mathrm{Trace}({}^t({}^tN\,A\,M)) = \mathrm{Trace}({}^tM\,{}^tA\,N) =< M, N >_A$ car A est symétrique.
- $< M, \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 >_A = \mathrm{Trace}({}^tM\,A\,(\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2)) = \mathrm{Trace}({}^tM\,A\,\lambda_1 N_1) + \mathrm{Trace}({}^tM\,A\,\lambda_2 N_2) = \lambda_1 < M, N_1 >_A + \lambda_2 < M, N_2 >_A$.

Donc $(M, N) \to < M, N >_A$ est bien une forme bilinéaire symétrique sur E.
Soit $M = (X_j^i)_{1\le i,j\le n}$, $N = (Y_j^i)_{1\le i,j\le n}$ et $A = (A_{ij})_{1\le i,j\le n}$ alors la matrice ${}^tM\,A\,N$ a pour terme général $(\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n X_i^k A_{k\ell} Y_j^\ell)_{i,j}$ et ainsi $< M, N >_A = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n X_i^k A_{k\ell} Y_i^\ell$. Mais ${}^tX_i\,A\,Y_j = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n X_k^i A_{k\ell} Y_j^\ell$, donc on a bien $< M, N >_A = \sum_{i=1}^n {}^tX_i\,A\,Y_i$.
Par suite, $< M, M >_A = \sum_{i=1}^n {}^tX_i\,A\,X_i$ et d'après la question (b), $< M, M >_A \ge 0$. Enfin, comme les valeurs propres de A sont strictement positives, toujours d'après la question (b), $< M, M >_A = 0$ si et seulement si $X_i = 0$ pour tout i, donc si $M = 0_E$. On en déduit donc que $< \cdot, \cdot >_A$ est un produit scalaire sur E.

(f) Il est clair que $< B_{ij}, B_{i'j'} >_{I_n} = 0$ si $(i, j) \neq (i', j')$ et $= 1$ sinon, donc $(B_{ij})_{ij}$ est une famille orthogonale. De plus, $\dim(E) = n^2$, ce qui est aussi exactement le nombre de B_{ij}, donc $(B_{ij})_{ij}$ est bien une base orthonormale.
Si on considère $C_{ij} = A^{-1/2}B_{ij}$ alors

$$< C_{ij}, C_{i'j'} >_A = \mathrm{Trace}({}^t(A^{-1/2}B_{ij})\,A(A^{-1/2}B_{i'j'})) = \mathrm{Trace}({}^tB_{ij}\,A^{-1/2}\,A\,A^{-1/2}\,B_{i'j'}) = \mathrm{Trace}({}^tB_{ij}\,B_{i'j'}) =< B_{ij}, B_{i'j'} >_{I_n},$$

donc $(C_{ij})_{ij}$ est une base orthonormale de E pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >_A$.

(g) On a bien $D \subset E$ et si $D_1 = \lambda_1 I_n \in D$ et $D_2 = \lambda_2 I_n \in D$, $\mu_1, \mu_2 \in R$, alors $\mu_1 D_1 + \mu_2 D_2 = (\mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2)I_n \in D$. Donc D est un sev de E.
Une base de D est constituée du vecteur I_n, donc une base orthonormale de E pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >_A$ est constituée du vecteur $I_n/\|I_n\|_A$ soit $I_n/\sqrt{\mathrm{Trace}(A)}$. D'après le cours, comme D est de dimension finie, on sait que l'infimum de $\|M - d\|_A$ pour $d \in D$ est atteint pour le projeté orthogonale $P_D(M)$ de M sur D et $P_D(M) =< I_n/\sqrt{\mathrm{Trace}(A)}, M >_A I_n/\sqrt{\mathrm{Trace}(A)} =< I_n, M >_A /\mathrm{Trace}(A) = \mathrm{Trace}(AM)/\mathrm{Trace}(A)$.

$\square$