Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 − 2010

Algèbre S4

Examen de septembre 2010

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(8 pts)** Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien de dimension n.
   (a) Soit x et y deux vecteurs orthogonaux et normés de E. Montrer que $x' = 2^{-1/2}(x-y)$ et $y' = 2^{-1/2}(x+y)$ sont également deux vecteurs orthogonaux et normés de E.
   (b) Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que e n'est pas unique.
   (c) Soit f un endomorphisme non nul de E dans E tel que pour tout $(x, y) \in E^2$ vérifiant $< x, y >= 0$ alors $< f(x), f(y) >= 0$ (on dit que f préserve l'orthogonalité). Donner un exemple simple d'une telle application f.
   (d) On note $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ avec $e'_i = f(e_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Montrer que e' est une base orthogonale de E et montrer qu'il existe un unique $\lambda > 0$ tel que pour tout $i = 1, \dots, n$, $\|e'_i\| = \lambda$ (on pourra utiliser la question (a)).
   (e) En déduire que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda \, \|x\|$.
   (f) Soit l'application $g = \lambda^{-1} f$. Quelle type d'application linéaire est g?

2. **(7 pts)** Soit $E = \mathbf{R}^3$. On pose pour tout $u = (x, y, z) \in E$,
   $$q(u) = 2xy + 2xz + 6yz.$$
   (a) Montrer que q est une forme quadratique sur E. Préciser sa forme bilinéaire associée ϕ.
   (b) Déterminer la signature de q.
   (c) Montrer qu'il existe une base orthogonale pour ϕ qui est aussi une base orthonormale pour le produit scalaire euclidien classique.
   (d) Déterminer le sup et l'inf de la fonction q sur E.
   (e) Déterminer le sup et l'inf de la fonction q sur la sphère $\mathcal{S}$ de rayon 1, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, y, z) \in E,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

3. **(10 pts)** Soit $\theta \in]0, \pi[$ et soit la fonction
   $$f(t) = \frac{1}{1 - \cos\theta \cos t}.$$
   (a) Etudier la fonction f et la tracer sur $[-4\pi, 4\pi]$.
   (b) Dans le cas où $\theta = \pi/2$, donner le développement en série de Fourier de f.

(c) Expliquer pourquoi il existe une unique suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $t \in R$, $f(t) = \dfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\, t)$.

(d) En utilisant ce développement et en recalculant $f(t)(1 - \cos\theta \cos t)$ avec des formules de trigonométrie, montrer que les coefficients (a_n) vérifient la propriété de récurrence:

$$2a_k = (a_{k-1} + a_{k+1}) \cos\theta \quad \text{pour } k \geq 1 \quad \text{et} \quad a_0 = a_1 \cos\theta + 2.$$

(e) Si $\theta \neq \pi/2$, en déduire que (a_k) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n = \lambda \Big(\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}\Big)^n + \mu \Big(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}\Big)^n.$$

(f) Expliquer pourquoi $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $\theta \in]0, \pi[$ et en déduire que $\mu = 0$. Montrer alors que $\lambda = 2\,(\sin\theta)^{-1}$.

(g) En déduire, en fonction de θ, la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(t)dt$.