Correction de quelques exercices de la Feuille n^o 2:

Une application en analyse: les séries de Fourier

(1) **(*)** Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le développement en série de Fourier de $f(x) = \cos^n(x)$.

Proof. Il suffit de linéariser f. Pour cela on écrit $f(x) = \frac{1}{2^n}\big(e^{ix} + e^{-ix}\big)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n C_n^k e^{ikx} e^{-i(n-k)x}$. Donc $f(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(2k-n)x}$.
Si n est pair, alors $2k-n$ est pair et on peut écrire que

$$f(x) = \frac{1}{2^n}\big(C_n^{n/2} + \sum_{k=1}^{n/2} C_n^k e^{i(2k)x} + \sum_{k=1}^{n/2} C_n^{n-k} e^{i(-2k)x}\big) = \frac{1}{2^n}\big(C_n^{n/2} + 2\sum_{k=1}^{n/2} C_n^k \cos(2kx)\big).$$

Si n est impair alors $2k-n$ est toujours impair et

$$f(x) = \frac{1}{2^n}\big(\sum_{k=0}^{(n-1)/2} C_n^k e^{i(2k+1)x} + \sum_{0}^{(n-1)/2} C_n^{n-k} e^{-i(2k+1)x}\big) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{0}^{(n-1)/2} C_n^k \cos((2k+1)x).$$

□

(3) **(*)** Soit la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x$ si $|x| < \pi$ et $f(\pi) = 0$.
(a) Déterminer la série de Fourier de f. Cette série de Fourier converge-t'elle vers f ? En quel sens ?
(b) En déduire les sommes des séries $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ puis $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Proof. f est impaire, et elle est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, mais non continue en π modulo 2π. On pourra donc appliquer le Théorème de Dirichlet. On peut calculer ses coefficients de Fourier:

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= 0) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*;\\
b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\Big(\big[-\frac{\cos(nx)}{n}x\big]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)dx\Big)\\
&= \frac{2}{\pi n}((-1)^n\pi) = 2\frac{(-1)^n}{n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

La série de Fourier de f est $S_f(x) = 2\sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{\sin(nx)}{n})$. Elle converge vers f ponctuellement sur $]-\pi,\pi[$ car on peut appliquer le Théorème de Dirichlet (la fonction f est continue). En π (modulo 2π), elle comverge vers $(f(\pi^+)+f(\pi^-)]/2 = (\pi-\pi)/2 = 0 = f(\pi)$ donc elle converge aussi vers f en π (modulo 2π). De ceci, on en déduit que pour $x = \pi/2$, comme $\sin((2n+1)\pi/2) = (-1)^n$ et $\sin(2n\pi/2) = 0$, alors $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} = S_f(\frac{\pi}{2}) = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$,
d'où $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} = \frac{\pi}{4}$.
Si on applique le Théorème de Bessel (ce qui est possible puisque la fonction est continue par morceaux), on obtient:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty b_n^2(f) = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2dx = \frac{1}{3}\pi^2,$$

d'où $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Enfin comme

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$$

on en déduit que $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$. □

(6) **(**)** On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[-\pi,\pi[$ par $f(x) = \cos\frac{x}{2}$.
(a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
(b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
(c) Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f?
(d) Déterminer les sommes des séries $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Proof. (a) f est paire, continue par et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$.
(b) On a donc $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\cos(x/2)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(\cos((n+1/2)x) + \cos((n-1/2)x)\big)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\sin((n+1/2)x)}{n+1/2} + \frac{\sin((n-1/2)x)}{n-1/2}\Big]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin((n+1/2)\pi)}{n+1/2} + \frac{\sin((n-1/2)\pi)}{n-1/2}\Big) \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{(-1)^n}{n+1/2} - \frac{(-1)^n}{n-1/2}\Big) = -\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{1}{n^2-1/4}. \end{aligned}$$

(c) On peut appliquer le Théorème de Dirichlet et on a donc $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\Big(2 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1/4}\cos(nx)\Big)$ la convergence étant uniforme (car la fonction f est continue sur $[-\pi, \pi]$).
(d) Si on applique la formule précédente pour $x = \pi$, on obtient que

$$f(\pi) = 0 = \frac{1}{\pi}\Big(2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1/4}\Big) \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

De plus, si on applique la formule pour $x = 0$, on obtient que

$$f(0) = 1 = \frac{1}{\pi}\Big(2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1/4}\Big) \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

□

(9) **(***)** Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément sur $[0, \pi]$, alors elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donner la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Parseval, montrer qu'elle est différente de la série de Fourier de sa somme.

Proof. On considère donc $g_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k\cos(kx) + \beta_k\sin(kx)$ et on suppose que (g_n) converge uniformément vers g sa limite. Alors, comme les fonctions $x \mapsto \alpha_k\cos(kx) + \beta_k\sin(kx)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ on en déduit que g est continue. Par ailleurs, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\cos(kx) + \beta_k\sin(kx)$. Comme g est continue donc intégrable, on montre facilement que $a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\cos(kx) + \beta_k\sin(kx)\big)\cos(nx)dx$ et comme la série converge uniformémement on peut intervertir la somme et l'intégrale donc $a_n(g) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\alpha_k\cos(kx) + \beta_k\sin(kx)\big)\cos(nx)dx = \alpha_n$ pour $n \geq 1$ et $a_0(g) = 2\alpha_0$. La même chose pour $b_n(f)$. Donc $S_g = g$.
Si $g = g_n$ alors il est bien clair que $S_g = g_n$ aussi.
La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement. On élimine d'entrée le cas où $x = \pi$ $[\pi]$ puisqu'alors la série est nulle. Pour le montrer on utilise la transformation d'Abel, en écrivant que $A_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$ et $A_0 = 0$, puis $\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = (A_n - A_{n-1})\frac{1}{\sqrt{n}}$ d'où $\sum_{n=1}^N\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^N A_n\frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=0}^{N-1}A_n\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{N-1}A_n\big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\big) + \frac{A_N}{\sqrt{N}}$.
Mais $A_n = \mathcal{I}m\Big(\sum_{k=1}^n e^{ikx}\Big) = \mathcal{I}m\Big(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\Big) = \sin((n+1)x/2)\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$ pour $x \neq \pi$ $[\pi]$. Donc pour $x \neq \pi$ $[\pi]$, $|A_n| \leq 1/\sin(x/2)$ et comme $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ pour $n \to \infty$, on en déduit que $\sum_{n=1}^{N-1}A_n\big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$ converge absolument quand $N \to \infty$ d'après le théorème de comparaison (puisque $\sum n^{-3/2}$ converge) et $\frac{A_N}{\sqrt{N}} \to 0$ quand $N \to \infty$. Il y a donc bien convergence simple sur $\mathbb{R}$.
D'après ce qui précède, finalement on peut montrer avec la transformation d'Abel que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tout intervalle fermé inclus dans $]0, 2\pi[$. En conséquence, comme $x \mapsto \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ est continue sur $]0, 2\pi[$. De plus, en 0 cette fonction vaut 0. La question est donc la limite de cette fonction en 0^+. Si celle-ci existe, on peut appliquer le Théorème de Bessel et le développement en série de Fourier de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ serait lui-même. Mais cette fonction ne converge pas dans ℓ^2 puisque $\sum(1/\sqrt{n})^2$ diverge. On en déduit que la limite de cette fonction en 0^+ n'existe pas, et donc la série de Fourier de f n'est pas f.

□