Corrections de quelques exercices de la feuille n^o 3:

Formes linéaires et espace dual

(1) **(*)** Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et $x_0 \in E$. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle x, x_0 \rangle$ est une forme linéaire sur E. Déterminer son noyau.

Proof. C'est une forme linéaire d'après la propriété de bilinéarité du produit scalaire. Par ailleurs, si $u(x) = \langle x_0, x \rangle$, $\ker u = \{x \in E,\ \langle x, x_0 \rangle = 0\} = {x_0}^{\perp}$. □

(2) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$. L'application $P \in E \mapsto P'(0)$ est-elle une forme linéaire sur E?

Proof. Si $u(P) = P'(0) \in \mathbb{R}$ alors $u(\lambda P) = (\lambda P)'(0) = \lambda u(P)$ pour tout $\lambda \in_R$ et tout $P \in E$. Pour $P, Q \in E$, on a bien $u(P+Q) = (P+Q)'(0) = u(P) + u(Q)$. □

(3) **(*)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1])$, ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$. Montrer que $f \in E \mapsto \int_0^1 t\, f(t) dt$ est une forme linéaire sur E.

Proof. Pour $\lambda \in R$ et $f, g \in E$, et avec $u(f) = \int_0^1 t\, f(t) dt \in \mathbb{R}$, on a bien $u(\lambda f) = \lambda u(f)$ et $u(f+g) = u(f) + u(g)$ d'après les propriétés de linéarité de l'intégrale. □

(4) **(**)** Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < \infty$. Montrer que $F = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n+1} = 0\right\}$ est un s.e.v. de E. Montrer que $\dim(F) = \infty$.

Proof. On montre d'abord que E est un e.v. Pour cela on montre que E est un s.e.v. de S l'ensemble des suites numériques. Ceci est vrai car 1/ la suite nulle appartient à E; 2/ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute suite $(u_n) \in E$, il est clair que $(\lambda u_n) \in E$ car $\sum (\lambda\, u_n)^2 = \lambda^2 \sum u_n^2 < \infty$; 3/ si (u_n) et (v_n) sont deux suites de E, on sait que $(u_n + v_n)^2 \leq 2(u_n^2 + v_n^2)$, donc $\sum (u_n + v_n)^2 \leq 2 \sum u_n^2 + 2 \sum v_n^2 < \infty$, donc $(u_n) + (v_n) \in E$.
Pour montrer que F est bien un s.e.v. de E, il suffit de considérer l'application $f : (u_n) \in E \to \sum \frac{u_n}{n+1}$. Cette application f est clairement une forme linéaire qui existe car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec le produit scalaire $\langle u, v \rangle = \sum u_n v_n$), $\left(\sum \frac{u_n}{n+1}\right)^2 \leq \left(\sum u_n^2\right)\left(\sum \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}\left(\sum u_n^2\right) < \infty$. Or F est le noyau de f, donc F est bien un s.e.v. de E.
Pour montrer que $\dim F = \infty$ il suffit de montrer que $\dim E = \infty$ car on sait que F est un hyperplan de E. Or les suite $(u_n^{(p)})$ telles que $u_n^{(p)} = (n+1)^{-p}$ pour $n \in \mathbb{N}$ appartiennent à E dès que $p \in \mathbb{N}^*$. De plus ces suites sont libres entre elles. En effet pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in R^k$ et tout $p_1 < p_2 < \cdots < p_k \in \mathbb{N}^{*k}$, alors si $\sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell u_n^{(p_\ell)} = \sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell \left(\frac{1}{n+1}\right)^{p_\ell} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or la dernière équation peut se voir comme une équation polynomiale de degré p_k admettant une infinité de racines, les $1/(n+1)$ avec $n \in \mathbb{N}$. La seule possibilité est donc que $\lambda_i = 0$ pour tout i: les $(u_n^{(p)})$ forme bien une famille libre de E. Or cette famille est infinie donc $\dim F = \infty$. □

(5) **(**)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit u et v deux formes linéaires sur E telles que $\ker u \neq \ker v$. Déterminer les dimensions de $\ker u + \ker v$ et de $\ker u \cap \ker v$.

Proof. On suppose que u et v sont des formes linéaires non nulles (sinon le résultat est évident puisqu'alors $\ker u = E$ si u est nulle et $\ker u + \ker v = E$, $\ker u \cap \ker v = \ker v$). On sait alors que $\dim \ker u = \dim \ker v = n-1$ donc $\dim(\ker u + \ker v) \geq n-1$. Comme $\ker u \neq \ker v$, il existe $x_u \in \ker v \neq 0$ mais $x_u \notin \ker u$ tel que $E = \ker u \oplus \mathrm{vect}(x_u)$ (si un tel x_u n'existait pas cela signifierait que $\ker u = E$). On en déduit donc que $\ker u + \ker v = E$. De plus d'après le cours on sait que $\dim(\ker u \cap \ker v) = n-2$. □

(6) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, on pose $f_i(x) = x_i - x_{i+1}$ pour $i = 1, \cdots, n-1$ et $f_n(x) = x_n - x_1$. Montrer que la famille $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de formes linéaires sur E. Rappeler ce qu'est E^*. A quelle condition $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est-elle une base de l'espace dual E^*? Dans le case où c'est bien une base duale de E^*, exprimer toute forme linéaire $f \in E^*$ dans cette base.

Proof. Chaque f_i est une combinaison linéaire des x_j: c'est donc bien une forme linéaire sur E.
E^* est l'ensemble des formes linéaires sur E. Pour que les n formes linéaires f_i constituent une base de E^* que l'on sait de dimension n, il est nécessaire et suffisant que ce soit une famille libre. Soit donc $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que $\sum_{i=1}^n \lambda_i\, f_i = 0$. On obtient donc que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\,(x_i - x_{i+1}) + \lambda_n (x_n - x_1) = 0$. Cela n'est possible que si $\lambda_{i+1} - \lambda_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$ et $\lambda_1 - \lambda_n = 0$. Ceci implique que $\lambda_i = \lambda_1$ pour tout i, mais pas nécessairement que les λ_i soient nuls: ce n'est donc jamais une base duale de E. □

(8) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$, soit $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, on pose $P_k(X) = (X-a)^k$. Montrer que $e = (P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de E. Déterminer la base e^* duale de e et calculer les composantes sur e^* de la forme linéaire $\phi :\ P \mapsto \int_0^a P(t)dt$.

Proof. Il est bien clair que les P_i forme une famille libre de E car ils sont tous de degrés distincts. De plus la dimension de E est $n+1$ et la famille e est de taille $n+1$: c'est donc bien une base de E.
La base duale e^* de e se définit par les applications linéaires f_i^* telles que $f_j^*(P_i) = \delta_{ij}$. Ceci signifie pour $j = 1$ que $f_1^*(1) = 1$ et $f_1^*((X-a)^i) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $X \in \mathbb{R}$. Pour cela il suffit de prendre l'application qui à P associe $P(a)$. De la même manière, on trouve que $f_j^* : P \mapsto P^{(j)}(a)/j!$ vérifie bien $f_j^*\big((X-a)^j\big) = 1$ et $f_j^*\big((X-a)^i\big) = 0$ pour $i \neq j$.
Il est clair que ϕ est bien une forme linéaire sur E. Elle s'écrit donc comme une unique combinaison linéaire des f_j^*.
De plus d'après la formule de Taylor prise en a, pour tout $P \in E$, $P(x) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$, donc

$$\phi(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) \int_0^a \frac{(x-a)^k}{k!} dx = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) \Big[\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\Big]_0^a = \sum_{k=0}^n \frac{(-a)^{k+1}}{(k+1)!} f_k^*(P).$$

□

(7) **(**)** Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel constitué des matrice carrées de taille n à coefficients réels. Montrer que $M \in E \mapsto \mathrm{Tr}(M)$, trace de M, est une forme linéaire sur E. Soit maintenant ϕ une forme linéaire sur E vérifiant $\phi(AB) = \phi(BA)$ pour toutes matrices A, B de E. Montrer alors que ϕ est proportionnelle à l'application Tr.

Proof. Il est clair que $\dim E = n^2$. De plus comme Tr est une forme linéaire, alors son noyau est de dimension $n^2 - 1$. Il est facile de donner une base de ce noyau. En effet, les matrices A_{ij}, nulle partout sauf ligne i et colonne j ou le terme vaut 1 forment une base de E. On s'aperçoit donc que les $n^2 - n$ matrices A_{ij} avec $i \neq j$ et les $n-1$ matrices $B_i = A_{11} - A_{ii}$ pour $i = 2, \ldots, n$ forment une base de $\ker \mathrm{Tr}$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que ces $n^2 - 1$ matrices appartiennent également à $\ker \phi$ et on aura ainsi montré que $\ker \phi = \ker \mathrm{Tr}$.
Pour montrer que A_{ij} appartient à $\ker \phi$, il suffit de voir que pour $i \neq j$, $A_{ij}A_{jj} = A_{ij}$ mais $A_{jj}A_{ij} = 0$. Or $\phi(A_{ij}A_{jj}) = \phi(A_{jj}A_{ij})$ d'après la définition de ϕ, donc $\phi(A_{ij}) = \phi(0) = 0$ et donc $A_{ij} \in \ker \phi$.
Pour montrer que $B_i \in \ker \phi$, on voit que pour $i = 2, \ldots, n$, $\phi(A_{i1}A_{11}A_{1i}) = \phi(A_{ii})$ et $\phi(A_{11}A_{1i}A_{i1}) = \phi(A_{11}A_{11}) = \phi(A_{11})$. Or $\phi(A_{i1}A_{11}A_{1i}) = \phi(A_{11}A_{1i}A_{i1})$ d'après la définition de ϕ, donc $\phi(A_{ii}) = \phi(A_{11})$ et donc $\phi(A_{11} - A_{ii}) = \phi(B_i) = 0$.
De ceci, on en déduit que $\ker \mathrm{Tr} \subset \ker \phi$. Donc si ϕ est non null, alors ϕ est proportionnelle à Tr. Si ϕ est nulle alors on a aussi ϕ est proportionnelle à Tr. □