Corrections de quelques exercices de la feuille n^o 4:

Applications linéaires adjointes et réduction des matrices symetriques et orthogonales

2 **(*)** Soit $E = \mathbb{R}[X]$. L'application $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(P)(x) = xP(x) \quad \forall P \in E$. Déterminer u^* pour le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$

Proof. $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$
$\langle u(P), Q\rangle = \int_0^1 tP(t)Q(t)dt$
$\langle u(P), Q\rangle = \int_0^1 P(t)tQ(t)dt$
$\langle u(P), Q\rangle = \langle P, u^*(Q)\rangle$
on a $u = u^*$ □

5 **(**)** Soit $f \in \mathbb{L}(\mathbb{E})$ tel que $fof^* = f^*of \quad f^2 = -Id_E$; Montrer que f est un endomorphisme orthogonal de E .

Proof. On veut montrer que $\|f(x)\| = \|x\|$, pour ce faire on fera :
$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$
$\|x\|^2 = \langle -f(x), f^*(x)\rangle$
$\|x\|^2 = \langle -f^2(x), x\rangle$
$\|x\|^2 \leq \|f(x)|.\|f^*(x)\|$
on a par ailleurs :
$\langle f \circ f^*(x), x\rangle = \langle f^*(x), f^*(x)\rangle$
$\langle f \circ f^*(x), x\rangle = \|f^*(x)\|^2$
et
$\langle f^* \circ f(x), x\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle$
$\langle f^* \circ f(x), x\rangle = \|f(x)\|^2$
d'où $\|f^*(x)\|^2 = \|f(x)\|^2$
ainsi $\|x\|^2 \leq \|f(x)\|^2 \quad$ et $\|x\| \leq \|f(x)\|$
ensuite on a, grâce au résultat précédent :
$\|f(x)\| \leq \|f^2(x)\|$
d'où $\|f(x)\| \leq \|x\|$
finalement $\|f(x)\| = \|x\|$

□

6 **(**)** Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes symétriques d'un espace E muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$. Montrer que $u \circ v$ est symétrique si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Proof. Supposons que $u \circ v$ est symétrique , montrons que $u \circ v = v \circ u$
$u \circ v = (u \circ v)^*$
$u \circ v = v^* \circ u^*$
$u \circ v = v \circ u$
Supposons que $u \circ v = v \circ u$, montrons que $u \circ v$ est symétrique
$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
$(u \circ v)^* = v \circ u$
$(u \circ v)^* = u \circ v$

□

7 **(***)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $f^2 = Id$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) f est une symétrie orthogonale.
(b) f est symétrique ($f^* = f$) c'est dire pour tout $x, y \in E, \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.
(c) f est une transformation orthogonale $i.e$ préserve le produit scalaire : $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

Proof. (a) $\Longrightarrow$ (b) Supposons que f est une symétrie orthogonale.
$\|f(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 \Rightarrow \langle f(x+y), f(x+y)\rangle = \langle x+y, x+y\rangle$
or $\langle f(x) + f(y), f(x) + f(y)\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
ainsi $\|f(x)\|^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle + \|f(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
$\Rightarrow 2\langle f(x), f(y)\rangle = 2\langle x, y\rangle$
remplaçons y par $f(y)$,
on a $\langle f(x), f^2(y)\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ d'où $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$

(b) $\Longrightarrow$ (c)

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \langle f^* \circ f(x), y\rangle \\ &= \left\langle f^2(x), y\right\rangle \\ &= \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

(c) $\Longrightarrow$ (a) Par définition de la symétrie orthogonale. □

8 **(**)** Soit E un espace euclidien et $u : E \mapsto E$ telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$ .Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ .En déduire que u est une applcation linéaire orthogonale.Soit $f : E \mapsto E$ telle que $x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que $f = t \circ u$, où t est une translation et u est orthogonale.

Proof. Montrer que $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
$\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$
$\langle u(x+y), u(x+y)\rangle = \langle x+y, x+y\rangle$
$\|u(x)\|^2 + 2\langle u(x), u(y)\rangle + \|u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
$2\langle u(x), u(y)\rangle = 2\langle x, y\rangle$
$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

Montrer que u est une application linéaire
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$
$\|u(\alpha x) - \alpha u(x)\|^2 = \|u(\alpha x)\|^2 + \alpha\|u(x)\|^2 - 2\alpha\langle u(\alpha x), u(x)\rangle$
$\|u(\alpha x) - \alpha u(x)\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \alpha^2\|x\|^2 - 2\alpha^2\langle u(\alpha x), u(x)\rangle$
$\|u(\alpha x) - \alpha u(x)\|^2 = \alpha^2\|x\|^2 + \alpha^2\|x\|^2 - 2\alpha^2\langle u(\alpha x), u(x)\rangle$
$\|u(\alpha x) - \alpha u(x)\|^2 = \alpha^2\|x\|^2 + \alpha^2\|x\|^2 - 2\alpha^2\|x\|^2$
$\|u(\alpha x) - \alpha u(x)\|^2 = 0$
Ainsi $u(\alpha x) = \alpha u(x)$
$\|u(x+y) - u(x) - u(y)\|^2 = \langle u(x+y) - (u(x) + u(y)), u(x+y) - (u(x) + u(y))\rangle$
$\|u(x+y) - u(x) - u(y)\|^2 = \|u(x+y)\|^2 - 2\langle u(x+y), u(x) - u(y)\rangle + \|u(x) + u(y)\|^2$
$\|u(x+y) - u(x) - u(y)\|^2 = \|x+y\|^2 - 2\langle u(x+y), u(x)\rangle - 2\langle u(x+y), u(y)\rangle + \|u(x)\|^2 + 2\langle u(x), u(y)\rangle + \|u(y)\|^2$
$\|u(x+y) - u(x) - u(y)\|^2 = 0$
d'où $u(x+y) = u(x) + u(y)$
u étant linéaire et $\|u(x) = \|x\|$, on a bien u orthogonale.
Montrons que $f = t \circ u$
On suppose qu'on peut écrire $f = t \circ u$
t translation , $\exists a \in E$ tel que $\forall y \in E$ $t(y) = y + a$
alors $f(x) = u(x) + a$
on a $f(0) = a$ car u est linéaire , ainsi $u(x) = f(x) - a$
d'où $u(x) = f(x) - f(0)$
u est orthogonal car

$$\begin{aligned}\|u(x)\| &= \|f(x)\| \\ &= \|x\|\end{aligned}$$

Inversement soit $t(y) = y + f(0)$ et $u(x) = f(x) - f(0)$
on a $f = t \circ u$
t est une translation
u est telle que

$$\begin{aligned}\forall x \in E \quad \|u(x)\| &= \|f(x) - f(0)\| \\ &= \|x\|\end{aligned}$$

on a la linéarité de u par la première question , d'où le résultat .

□

14 **(**)** Résoudre l'équation $M^2 - 3M + 2\,I_n = 0$ pour M une matrice carrée symétrique de taille 2.
M étant une matrice carrée symétrique, elle est diagonalisable.
il existe une matrice orthogonale P telle que $M = PDP^{-1}$
d'où $P(D^2 - 3D + 2I_2)P^{-1} = 0$
$D^2 - 3D + 2I_2 = 0$
On a deux équations du second degré : $d_i^2 - 3d_i + 2 = 0$
elles ont pour racines $d_i = 1$ et $d_2 = 2$
les solutions sont :
$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

L'ensemble des solutions est donné par :
$\mathcal{S} = \mathcal{O}_2.\mathcal{D}$.