Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 – 2010

Analyse S4

Contrôle continu n°1, avril 2010

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. On considère l'intégrale:
$$I = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t))dt.$$
   (a) Montrer que I est une intégrale convergente.
   (b) Montrer que $I = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt$. En déduire également que $I = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt$.
   (c) Montrer que $I = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt$.
   (d) En utilisant l'expression de $\sin(2t)$ en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$, et les relations précédentes, en déduire que $I = -\pi \ln 2$.

2. Montrer que l'intégrale I converge avec
$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{\ln(t+1)}dt.$$

3. Soit le domaine D de $\mathbf{R}^2$ tel que
$$D = \Big\{(x,y) \in]0,\infty[^2, \quad x \leq y \leq 2x \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\Big\}.$$
   Tracer D. Calculer l'aire de D, soit $A = \int\int_D dxdy$ (on pourra utiliser le changement de variable $(x,y) = \phi(u,v) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv})$ après avoir montré que c'est bien un changement de variable admissible).