Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 − 2010

Analyse S4

Correction du contrôle continu n°1, avril 2010

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(9 points)** On considère l'intégrale:

$$I = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t))dt.$$

   (a) Montrer que I est une intégrale convergente.

   (b) Montrer que $I = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt$. En déduire également que $I = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt$.

   (c) Montrer que $I = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt$.

   (d) En utilisant l'expression de $\sin(2t)$ en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$, et les relations précédentes, en déduire que $I = -\pi \ln 2$.

Proof. (a) la fonction $f : x \mapsto \ln(sin(x))$ est localement intégrable sur $]0,\pi[$. Il y a donc un problème de convergence en 0 et en π. En 0, $\sin(x) \sim x$, donc $f(x) \sim \ln(x)$. Mais $\int_0^1 \ln(t)dt$ existe puisqu'une primitve de $\ln(t)$ est $t(\ln(t)-1)$ qui converge en 0 (vers 0). Donc d'après le Théorème de comparaison $\int_0^1 \ln(\sin(t))dt$ existe [**1.5pts**]. En π, on a $\sin(\pi-\varepsilon) = \sin(\varepsilon) \sim \varepsilon$ lorsque ε est petit. On en déduit que lorsque x est proche π alors $f(x) \sim \ln(\pi - x)$ et comme précédemment, $\ln(\pi - x)$ admet une primitive qui est $(\pi - x)(1 - \ln(\pi - x))$ qui existe quand $x \to \pi$. Donc d'après le Théorème de comparaison $\int_1^{\pi} \ln(\sin(t))dt$ existe et ainsi I existe [**1.5pts**].
(b) On a $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(t))dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt - \int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi-u))du = 2I$ avec le changement de variable $u = \pi - t$ [**1.5pts**].
De plus, avec le changement de variable $v = \pi/2 - t$, on a $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt = -\int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi/2 - v))dv = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(v))dv$ d'où $I = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt$. [**1pt**]. (c) On utilise le changement de variable $t = 2s$. Alors $I = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t))dt = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2s))ds$ [**1pts**].
(d) On sait que $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ donc $\ln(\sin(2t)) = \ln(2) + \ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))$ pour $t \in]0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi[$ [**1pt**]. Comme $I = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2s))ds$, on en déduit que $I = 2\int_0^{\pi/2} \ln(2) + \ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))dt = \pi \ln 2 + I + I$, d'où $I = -\pi \ln 2$ [**1.5pts**]. □

2. **(5 points)** Montrer que l'intégrale I converge avec

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{\ln(t+1)}dt.$$

Proof. La fonction $f(t) = \frac{\sin(t)}{\ln(t+1)}$ est localement intégrable sur $]0,\infty[$. Il y a des problèmes de convergence en 0 et en ∞. En 0, $\sin t \sim t$ et $\ln(t+1) \sim t$, donc $f(t) \to 1$: la fonction f est prolongeable par continuité en 0, elle est donc intégrable en 0 [**1.5pts**]. En ∞, on utilise une intégration par parties:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(t)}{\ln(t+1)}dt = \Big[-\frac{\cos(t)}{\ln(t+1)}\Big]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \frac{\cos(t)}{(t+1)(\ln(t+1))^2}dt.$$

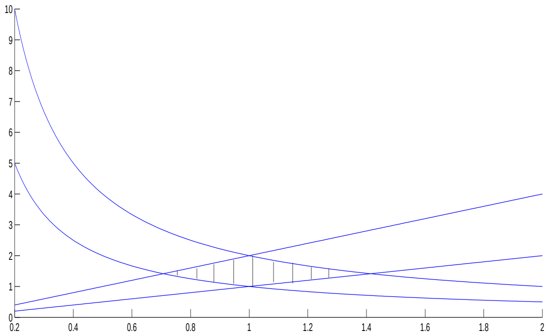
Mais $\int_1^{\infty} \Big|\frac{\cos(t)}{(t+1)(\ln(t+1))^2}\Big| dt \leq \int_2^{\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2}dt \leq \Big[\frac{1}{\ln(t)}\Big]_2^{\infty} < \infty$. Donc l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{\cos(t)}{(t+1)(\ln(t+1))^2}dt$ est absolument convergente, et ainsi I existe [**3.5pts**]. □

3. **(7 points)** Soit le domaine D de $\mathbf{R}^2$ tel que

$$D = \{(x,y) \in]0,\infty[^2, \quad x \leq y \leq 2x \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\}.$$

Tracer D. Calculer l'aire de D, soit $A = \int\int_D dxdy$ (on pourra utiliser le changement de variable $(x,y) = \phi(u,v) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv})$ après avoir montré que c'est bien un changement de variable admissible).

Proof. Voici le tracé (zone hachurée) de D **[1.5pts]**.



On vérifie que le changement de variable est possible. Comme lorsque $(x,y) \in D$ on a $x > 0$ et $y > 0$, ce changement de variable est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. Ensuite, on montre facilement que $(u,v) = (\frac{y}{x}, xy)$, donc ϕ est bien bijective, et on voit clairement que ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\phi(D) \subset]0,\infty[^2$ **[2pts]**.
Par ailleurs, on montre facilement que $|\det J_\phi(u,v)| = \frac{1}{2v}$ **[1.5pts]**. De plus comme D s'écrit $D = \big\{(x,y) \in]0,\infty[^2,\ 1 \leq y/x \leq 2 \text{ et } 1 \leq xy \leq 2\big\} = \big\{(x,y) \in]0,\infty[^2,\ 1 \leq u \leq 2 \text{ et } 1 \leq v \leq 2\big\}$, on a:

$$A = \int\int_D dxdy = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2}\big[\ln(v)\big]_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2 \ \textbf{[2pts]}.$$

□