Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année $2010-2011$

Analyse S4

Contrôle continu n°1, mars 2011

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(14 points)** Le but de cet exercice est de trouver la valeur de $I=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}dx$. Pour ce faire, on définit $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}}\Big(\cos\big(\frac{x}{\sqrt{n}}\big)\Big)^n dx$ pour $n\in\mathbf{N}^*$.
   (a) Montrer que I_n existe pour tout $n\in\mathbf{N}^*$.
   (b) Montrer que $I_n=\sqrt{n}\,J_n$ avec $J_n=\int_0^{\pi/2}(\cos x)^n dx$.
   (c) Calculer J_1 et J_2.
   (d) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n\geq 3$, $J_n=\frac{n-1}{n}\,J_{n-2}$. En déduire, les expressions de J_{2n} et J_{2n+1} en fonction de n.
   (e) Montrer que I existe. Montrer que pour tout $x\in[0,\pi/2]$, on a $0\leq\cos(x)\leq 1-\frac{x^2}{4}$. En déduire que I_n converge quand $n\to\infty$ et préciser sa limite.
   (f) En considérant la limite de la suite (u_n) telle que $u_n=I_{2n}I_{2n+1}$ pour $n\geq 1$, déterminer la valeur de I.

2. **(8 points + 4 points facultatifs)** Soit $D=\Big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ y^2\leq 2x \text{ et } x^2\leq 2y\Big\}$ et soit
$$A=\int\int_D \exp\Big(\frac{x^3+y^3}{xy}\Big)\,dxdy.$$
   (a) Tracer D.
   (b) Montrer que si $(x,y)\in D$ alors $x\in[0,2]$ et $y\in[0,2]$.
   (c) **(Question facultative: 4pts)** Pour $0\leq x\leq 2$ fixé, étudier la fonction $y\mapsto\frac{x^3+y^3}{xy}$ quand $(x,y)\in D$. En déduire que pour $(x,y)\in D$, $0\leq\frac{x^3+y^3}{xy}\leq 4$. En déduire que A existe.
   (d) On pose le changement de variable $(x,y)=\phi(u,v)=(u^2v,v^2u)$. Montrer que c'est bien un changement de variable admissible sur l'ensemble $D'=\phi^{-1}(D\setminus\{0,0)\})$ que l'on précisera.
   (e) Calculer A.