Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2010 – 2011

Analyse S4

Contrôle continu n°1, mars 2011

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(14 points)** Le but de cet exercice est de trouver la valeur de $I = \int_0^\infty e^{-x^2/2}dx$. Pour ce faire, on définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} \Big(\cos\big(\frac{x}{\sqrt{n}}\big)\Big)^n dx$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

   (a) Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

   (b) Montrer que $I_n = \sqrt{n}\, J_n$ avec $J_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx$.

   (c) Calculer J_1 et J_2.

   (d) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \geq 3$, $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$. En déduire, les expressions de J_{2n} et J_{2n+1} en fonction de n.

   (e) Montrer que I existe. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{4}$. En déduire que I_n converge quand $n \to \infty$ et préciser sa limite.

   (f) En considérant la limite de la suite (u_n) telle que $u_n = I_{2n} I_{2n+1}$ pour $n \geq 1$, déterminer la valeur de I.

Proof. (a) la fonction $f : x \mapsto \cos^n(x/\sqrt{n})$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}\sqrt{n}]$ qui est un fermé donc l'intégrale est une intégrale définie **[0.5pt]**.
(b) obtenu par le changement de variable $y = x/\sqrt{n}$ **[0.5pts]**.
(c) $J_1 = 1$ et $J_2 = \pi/4$ **[1.5pts]**.
(d) grâce à une intégration par parties, on obtient que $J_n = \big[\sin(x)\, \cos^{n-1}(x)\big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^{n-2}(x)dx = 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2(x))\cos^{n-2}(x)dx$ d'où le résultat **[2pts]**.
De ceci, on déduit que $J_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{3}{4} J_2 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\,\frac{\pi}{2}$ et $J_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} J_1 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ pour $n \geq 1$ **[1pt]**.
(e) La fonction $x \mapsto e^{-x^2/2}$ est continue sur $[0, \infty[$. Il y a donc un problème de convergence en $+\infty$. Mais $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2/2} = 0$ donc comme $\int_1^\infty x^{-2}dx$ existe, d'après le Théorème de comparaison $\int_1^\infty e^{-x^2/2}dx$ existe, donc $\int_0^\infty e^{-x^2/2}dx$ existe **[1.5pts]**.
On étudie la fonction $g(x) = 1 - \frac{x^2}{4} - \cos x$ sur $[0, \pi/2]$ et $g''(x) = \sin x - \frac{1}{2}$ est positive sur $[0, \pi/3]$ on montre que $g' \geq 0$ sur $[0, \pi/2]$, d'où g croissante donc positive sur $[0, \pi/2]$ **[1.5pts]**.
On va utiliser le Théorème de convergence dominée de Lebesgue. En effet, avec $f_n = \cos^n(x/\sqrt{n})\, \mathbb{I}_{x\in[0,\pi/2\sqrt{n}]}$, on a $I_n = \int_0^\infty f_n(x)dx$. On a clairement I_n qui existe, mais aussi grâce à des développements limités usuels $f_n(x) = \exp(n\log(\cos(x/\sqrt{n}))) = \exp(n\log(1 - \frac{x^2}{2n}(1+o(1)))) = \exp(-\frac{x^2}{2}(1+o(1))$ donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \exp(-x^2/2)$. De plus, $|f_n(x)| \leq \exp(n\log(1 - \frac{x^2}{4n}))$ pour tout $x \in [0, \pi/2\sqrt{n}]$ donc comme $\log(1-x) \leq -x$ pour tout $x < 1$, on en déduit que $|f_n(x)| \leq g(x)$ avec $g(x) = \exp(-x^2/4)$ et comme vu pour I, il est clair que $\int_0^\infty g(x)dx < \infty$. Toutes les hypothèses sont donc réunies pour appliquer le Théorème de convergence dominée de Lebesgue et on a donc $\lim_{n\to\infty} I_n = I$ **[3.5pts]**.
(f) Il est clair que comme la suite (I_n) a pour limite I, alors (u_n) a pour limite I^2. Mais $u_n = \sqrt{2n}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\,\frac{\pi}{2} \times \sqrt{2n+1}\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2n}{2n+1}}\,\frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$ et ainsi que $I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ **[2pts]**.

□

2. **(8 points + 4 points facultatifs)** Soit $D = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ y^2 \leq 2x \text{ et } x^2 \leq 2y\Big\}$ et soit

$$A = \int\int_D \exp\Big(\frac{x^3+y^3}{xy}\Big)\, dxdy.$$

(a) Tracer D.

(b) Montrer que si $(x,y) \in D$ alors $x \in [0,2]$ et $y \in [0,2]$.

(c) **(Question facultative: 4pts)** Pour $0 \leq x \leq 2$ fixé, étudier la fonction $y \mapsto \frac{x^3+y^3}{xy}$ quand $(x,y) \in D$. En déduire que pour $(x,y) \in D$, $0 \leq \frac{x^3+y^3}{xy} \leq 4$. En déduire que A existe.

(d) On pose le changement de variable $(x,y) = \phi(u,v) = (u^2v, v^2u)$. Montrer que c'est bien un changement de variable admissible sur l'ensemble $D' = \phi^{-1}(D \setminus \{0,0)\})$ que l'on précisera.

(e) Calculer A.

Proof. (a) On trace la parabole $y = x^2/2$ et les deux courbes $y = \pm\sqrt{2x}$, mais comme $y \geq 0$, on s'aperçoit que le domaine D est seulement délimité par $0 \leq x^2/2 \leq y \leq \sqrt{2x}$ avec $x \geq 0$ **[1pt]**.
(b) Il suffit de calculer le point de concours entre $y = x^2/2$ et $y = \sqrt{2x}$, ce qui revient à $x^3 = 8$ et on vérifie bien que $x \in [0,2]$ et $y \in [0,2]$ **[1pt]**.
(c) Si $f(y) = \frac{x^3+y^3}{xy}$ avec $x^2/2 \leq y \leq \sqrt{2x}$ et $0 \leq x \leq 2$ fixé, on a $f'(y) = \frac{2y^3-x^3}{xy^2}$ donc $f'(x) = 0$ pour $y = 2^{1/3}x$ et ainsi f décroît pour $y \in [x^2/2, 2^{1/3}x]$ et f croît pour $y \in [2^{1/3}x, \sqrt{2x}]$. On en déduit que f est maximale en $y = \max(x^2/2, \sqrt{2x}) = \sqrt{2x}$ et $\max_y f(y) = 2 + x^{3/2}/\sqrt{2}$. Ceci est maximum pour $x = 2$ et on trouve bien que $\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 4$ **[3pts]**.
Ainsi $g(x,y) = \frac{x^3+y^3}{xy}$ est continue sur D sauf en $(0,0)$, g est positive et bornée sur D qui est un compact. On en déduit d'après le Théorème de comparaison que I existe **[1pt]**.
(d) Il est clair que l'on peut écrire de manière univoque $u = (x^2/y)^{1/3}$ et $v = (y^2/x)^{1/3}$, sauf en $(0,0)$. On posera donc $\phi^{-1}(x,y) = \big((x^2/y)^{1/3}, (y^2/x)^{1/3}\big)$ pour $(x,y) \in D \setminus \{0,0\}$. Comme $x^2/2 \leq y \leq \sqrt{2x}$, on a $D' = \{(u,v) \in]0,\infty[^2,\ u^4v^2/2 \leq v^2u \leq \sqrt{2v}\,u\} = \{(u,v) \in]0,\infty[^2,\ u^3 \leq 2 \text{ et } v^3 \leq 2\} =]0, 2^{1/3}] \times]0, 2^{1/3}]$: D' est un pavé (un carré). Enfin, ϕ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur D' et ϕ^{-1} de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D \setminus \{(0,0)\}$: c'est donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et un changement de variable admissible **[3.5pts]**.
(e) On calcule le Jacobien de ϕ soit $\big|\det(J_\phi(u,v))\big| = \big|2uv \times 2uv - u^2v^2\big| = 3u^2v^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
A &= \int\int_{D'} 3u^2v^2 \exp\big(u^3+v^3\big)\, dudv \\
&= 3\Big(\int_0^{2^{1/3}} u^2 e^{u^3}\, du\Big)^2 \quad \text{(d'après Fubini)} \\
&= \frac{1}{3}\Big(\big[e^{x^3}\big]_0^{2^{1/3}}\Big)^2 \\
&= \frac{(e^2-1)^2}{3} \quad \textbf{[2.5pts]}.
\end{aligned}$$

$\square$