Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année $2010-2011$

Analyse S4

Contrôle continu n°1, mars 2012

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(13 points)** On définit $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/n}(1+x)}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

   (a) Montrer que I_1 n'existe pas, mais que I_n existe pour $n \geq 2$.

   (b) On cherche la limite de (I_n) lorsque $n \to \infty$. A cette fin, on définit $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/n}(1+x)}$ et $K_n = \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/n}(1+x)}$ pour $n \geq 2$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$.

   (c) Montrer que $x^{1/n}(1+x) \leq 2\,x^{1+1/n}$ pour tout $x \geq 1$ et $n \geq 2$. En déduire une minoration de K_n pour $n \geq 2$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} K_n$ et enfin $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

   (d) Faire le changement de variable $y = x^{1/n}$ dans K_N, en déduire un équivalent de K_n quand $n \to \infty$, puis un équivalent de I_n.

2. **(9 points)** Soit $D = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y-x \leq 1\Big\}$ et soit

$$A = \int\int_D x^{y-x}\,dxdy.$$

   (a) Tracer D.

   (b) Montrer que A existe, puis que $A = \displaystyle\int\int_{[0,1]^2} u^v\,dudv.$.

   (c) Soit $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t}\,dt$. Montrer que J existe.

   (d) Calculer A en utilisant le Théorème de Fubini.

   (e) En utilisant dans un autre sens le Théorème de Fubini, montrer que $J = -\ln 2$.