Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2010 − 2011

Analyse S4

Contrôle continu n°1, mars 2012

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(13 points)** On définit $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/n}(1+x)}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

    (a) Montrer que I_1 n'existe pas, mais que I_n existe pour $n \geq 2$.

    (b) On cherche la limite de (I_n) lorsque $n \to \infty$. A cette fin, on définit $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/n}(1+x)}$ et $K_n = \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/n}(1+x)}$ pour $n \geq 2$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$.

    (c) Montrer que $x^{1/n}(1+x) \leq 2\,x^{1+1/n}$ pour tout $x \geq 1$ et $n \geq 2$. En déduire une minoration de K_n pour $n \geq 2$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} K_n$ et enfin $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

    (d) Faire le changement de variable $y = x^{1/n}$ dans K_N, en déduire un équivalent de K_n quand $n \to \infty$, puis un équivalent de I_n.

Proof. (a) On a $I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x)}$. Problèmes de convergence en 0 et en 1. En 0, $\frac{1}{x(1+x)} \sim \frac{1}{x}$, et comme $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty$, donc d'après le Théorème de comparaison, I_1 diverge **[1.5pts]**.
Pour $n \geq 2$, soit $f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n}(1+x)}$ pour $x \geq 0$. Cette fonction est continue sur $]0, \infty[$. Il y a donc un problème de convergence en 0 et en 1. En 0, $f_n(x) \sim \frac{1}{x^{1/n}}$ et comme $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/n}}dx$ converge (car $1/n \leq 1/2$), d'après le Théorème de comparaison $\int_0^1 f_n(x)dx$ converge. En $+\infty$, $f_n(x) \simeq \frac{1}{x^{1+1/n}}$. Comme $1 + 1/n > 1$, c'est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le Théorème de comparaison $\int_1^\infty f_n(x)dx$ converge. Ainsi I_n converge pour $n \geq 2$ **[2.5pts]**.
(b) Pour la limite de J_n, on utilise le théorème de convergence monotone: $f_n(x) \to (1+x)^{-1}$ pour $x \in]0, 1]$ et en plus $0 < f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ pour $x \in]0, 1]$ et $n \geq 2$ (car $x^{1/(n+1)} \geq x^{1/n}$). Donc $J_n \to \int_0^1 (1+x)^{-1}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$ **[2.5pts]**.
(c) Il est clair que pour $x \geq 1$, $1 + x \leq 2x$, d'où le résultat **[0.5pts]**. On en déduit que $f_n(x) \geq \frac{1}{2}\,x^{-1-1/n}$, donc $K_n \geq \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-1-1/n}dx = \frac{n}{2}$. D'après le Théorème de comparaison, $K_n \to +\infty$ **[2pts]**. On en déduit que $I_n \to +\infty$ **[0.5pts]**.
(d) On a un changement de variable admissible (bijectif et $\mathcal{C}^1$) et $K_n = n\int_1^\infty \frac{y^{n-2}}{1+y^n}\,dy$ **[0.5pts]**. D'après le Théorème de Lebesgue, $\frac{y^{n-2}}{1+y^n} \to \frac{1}{y^2}$ pour $y > 1$ quand $n \to \infty$ et pour $n \geq 2$, $\frac{y^{n-2}}{1+y^n}\,\frac{1}{y^2}$, avec $\int_1^\infty \frac{1}{y^2}\,dy < \infty$ donc $\int_1^\infty \frac{y^{n-2}}{1+y^n}\,dy \to \int_1^\infty \frac{1}{y^2}\,dy = 1$. Ainsi $K_n \sim n$ quand $n \to \infty$ **[2.5pts]**, et donc $I_n \sim n$ (car $J_n \to \ln 2$) **[0.5pts]**. □

2. **(9 points)** Soit $D = \Big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y - x \leq 1\Big\}$ et soit

$$A = \int\int_D x^{y-x}\,dxdy.$$

    (a) Tracer D.

(b) Montrer que A existe, puis que $A = \int\int_{[0,1]^2} u^v \, dudv.$.

(c) Soit $J = \int_0^1 \frac{1-t}{\ln t} \, dt$. Montrer que J existe.

(d) Calculer A en utilisant le Théorème de Fubini.

(e) En utilisant dans un autre sens le Théorème de Fubini, montrer que $J = -\ln 2$.

Proof. (a) On obtient un losange **[1pt]**.
(b) On a $(x, y) \to x^{y-x}$ qui est continue pour $(x, y) \in D$, donc A existe **[1pt]**. On utilise le changement de variable $u = x$, $v = y - x$ et on obtient la nouvelle expression de A **[1pt]**.
(c) Concernant le problème de convergence en 1. Or $\ln t = \ln(1 + (t-1)) \sim t - 1$ pour $t \to 1$. Donc $\frac{1-t}{\ln t} \sim 1$ pour $t \to 1$. Donc la fonction peut être prolongée par continuité en 1, donc il y a bien convergence en 1. En 0, $\frac{1-t}{\ln t} \sim \frac{1}{\ln t} \to 0$. Donc on peut également prolonger par continuité la fonction en 0 **[2.5pts]**.
(d) On peut utiliser le Théorème de Fubini et on a

$$\int\int_{[0,1]^2} u^v \, dudv = \int_0^1 \Big[\int_0^1 u^v \, du \Big] dv = \int_0^1 \frac{1}{v+1} \, dv = \ln 2 \qquad \textbf{[1.5pts]}.$$

(e) On peut aussi écrire

$$\int\int_{[0,1]^2} u^v \, dudv = \int_0^1 \Big[\int_0^1 e^{v \ln u} \, dv \Big] du = \int_0^1 \frac{1}{\ln u} [e^{v \ln u}]_0^1 du = \int_0^1 \frac{u-1}{\ln u} \, du = -J \qquad \textbf{[1.5pts]}.$$

On en déduit donc $J = -\ln 2$ **[0.5pts]**. □