Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2012 – 2013

Analyse S4

Contrôle continu n°1, février 2013

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(14 points)** On définit $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}-\sin(x)}\,dx$. On note $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}-\sin(x)}$.
   (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $x > \sin(x)$ et en déduire que pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} > \sin(x)$.
   (b) Donner un équivalent de f lorsque x tend vers 0. En déduire que $\int_0^1 f(x)dx$ converge.
   (c) Montrer que pour $x \to \infty$, $f(x) = g(x) + h(x)$ avec $g(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin(2x)\sin(x)}{x}$ et $h(x) = \frac{\sin(2x)\sin^2(x)}{x^{3/2}} + o(x^{-3/2})$.
   (d) Montrer que $\int_1^\infty h(x)dx$ converge.
   (e) Montrer en utilisant les exponentielles complexes que $2\sin(2x)\sin(x) = \cos(x) - \cos(3x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. En déduire, en justifiant, que $\int_1^\infty g(x)dx$ converge.
   (f) Déduire de tout ceci que I converge.
   (g) En utilisant le fait que $\int_1^\infty |\sin(x)|x^{-\alpha}dx$ diverge pour $\alpha < 1$, déduire que I n'est pas absolument convergente.

2. **(8 points)** On considère un cône circulaire $\mathcal{C}$ de hauteur $L > 0$ et de rayon de base $R > 0$. Ceci revient à considérer l'ensemble dans $\mathbf{R}^3$ tel que:

$$\mathcal{C} = \Big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ 0 \le z \le L \text{ et } \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{R\,(L-z)}{L}\Big\}.$$

   (a) Tracer $\mathcal{C}$.
   (b) Montrer, en justifiant, que le volume V de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $V = \int_{\mathcal{C}} dxdydz$, peut s'écrire sous la forme d'une intégrale double que l'on précisera (sans la calculer).
   (c) On considère le changement de variables $(x,y,z) = \phi(r,\theta,z')$ avec $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $z = L - \frac{L}{R}z'$. Montrer que ce changement de variable est bijectif et de classe $\mathcal{C}^1$ pour $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $z \in [0, L]$ (exprimer $\phi^{-1}(x,y,z)$)). Déterminer l'ensemble $\phi^{-1}(\mathcal{C}^*)$, ou $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \setminus \{(0,0,L)\}$.
   (d) En utilisant la formule de changement de variables, montrer que $V = \dfrac{L}{R}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{z'} r\,drdz'd\theta$. En déduire V.