Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2012 – 2013

Analyse S4

Correction du Contrôle continu n°1, février 2013

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(14 points)** On définit $I = \int_0^\infty \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}-\sin(x)}\,dx$. On note $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}-\sin(x)}$.
   (a) Montrer que pour tout $x>0$, $x>\sin(x)$ et en déduire que pour tout $x>0$, $\sqrt{x}>\sin(x)$.
   (b) Donner un équivalent de f lorsque x tend vers 0. En déduire que $\int_0^1 f(x)dx$ converge.
   (c) Montrer que pour $x\to\infty$, $f(x) = g(x)+h(x)$ avec $g(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin(2x)\sin(x)}{x}$ et $h(x) = \frac{\sin(2x)\sin^2(x)}{x^{3/2}} + o(x^{-3/2})$.
   (d) Montrer que $\int_1^\infty h(x)dx$ converge.
   (e) Montrer en utilisant les exponentielles complexes que $2\sin(2x)\sin(x) = \cos(x)-\cos(3x)$ pour tout $x\in\mathbf{R}$. En déduire, en justifiant, que $\int_1^\infty g(x)dx$ converge.
   (f) Déduire de tout ceci que I converge.
   (g) En utilisant le fait que $\int_1^\infty |\sin(x)|x^{-\alpha}dx$ diverge pour $\alpha<1$, déduire que I n'est pas absolument convergente.

Proof. (a) On étudie simplement la fonction $g(x) = x-\sin(x)$ et comme $g'(x) = 1-\cos(x) > 0$ sauf en un nombre fini de points (en $2k\pi$), g est croissante strictement, avec $g(0)=0$: d'où le résultat **(1.5pts)**. Pour $x\in]0,1]$, on a $\sqrt{x}\geq x$, donc $\sqrt{x}>\sin(x)$ et pour $x>1$, on a $\sqrt{x}>1$ alors que l'on a toujours $\sin(x)\leq 1$: donc pour $x>1$, $\sqrt{x}>\sin(x)$ **(1.5pts)**.
(b) En 0, $\sin(2x)\sim 2x$, $\sqrt{x}-\sin(x) = \sqrt{x}-x-o(x)\sim\sqrt{x}$ donc $f(x)\sim 2\sqrt{x}$ **(1pt)**. Comme f est prolongeable par continuité en 0 par 0, on en déduit que $\int_0^1 f(x)dx$ converge **(1pt)**.
(c) On peut écrire que $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{1-\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}}$ puis on utilise le développement limité de $(1-u)^{-1} = 1+u+u^2+o(u^2)$ pour $u\to 0$ car $\sin(x)/\sqrt{x}$ tend vers 0 quand $x\to\infty$ **(2pts)**.
(d) D'après l'expression de h, pour x suffisamment grand, $|h(x)|\leq 2x^{-3/2}$. Comme $\int_1^\infty x^{-3/2}dx$ converge on en déduit d'après le théorème de comparaison que $\int_1^\infty h(x)dx$ est absolument convergente **(1.5pts)**.
(e) On a $2\sin(x)\sin(2x) = -\frac{1}{2}(e^{ix}-e^{-ix})(e^{2ix}-e^{-2ix}) = -\frac{1}{2}\big(e^{3ix}-e^{ix}-e^{-ix}+e^{-3ix}\big) = \cos(x)-\cos(3x)$ **(1pt)**.
Ainsi on peut écrire que $\int_1^t g(x)dx = \int_1^t \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}dx + \frac{1}{2}\int_1^t \frac{cos(x)-\cos(3x)}{x}dx$. Pour chacune de ces intégrales, on effectue une intégration par parties, en intégrant le terme trigonométrique et dérivant l'autre terme. On obtient ainsi des termes qui tendent directement vers 0 lorsque $t\to\infty$ et deux intégrales que l'on montre être absolument convergentes (théorème de comparaison) **(3pts)**.
(f) Comme g et h sont intégrables sur $[1,\infty[$, on en déduit que f est intégrable sur $[1,\infty[$, et comme c'est aussi le cas sur $[0,1]$, on en déduit que I existe **(0.5pts)**.
(g) Il est clair que pour $x\to\infty$, $|f(x)|\sim|sin(2x)|x^{-1/2}$ d'où la divergence de $\int_0^\infty |f(x)|dx$ d'après le théorème de comparaison **(1pt)**. □

2. **(8 points)** On considère un cône circulaire $\mathcal{C}$ de hauteur $L>0$ et de rayon de base $R>0$. Ceci revient à considérer l'ensemble dans $\mathbf{R}^3$ tel que:

$$\mathcal{C} = \Big\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ 0\leq z\leq L \text{ et } \sqrt{x^2+y^2}\leq\frac{R\,(L-z)}{L}\Big\}.$$

(a) Tracer $\mathcal{C}$.

(b) Montrer, en justifiant, que le volume V de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $V = \int_{\mathcal{C}} dxdydz$, peut s'écrire sous la forme d'une intégrale double que l'on précisera (sans la calculer).

(c) On considère le changement de variables $(x, y, z) = \phi(r, \theta, z')$ avec $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $z = L - \frac{L}{R}z'$. Montrer que ce changement de variable est bijectif et de classe $\mathcal{C}^1$ pour $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $z \in [0, L]$ (exprimer $\phi^{-1}(x, y, z)$)). Déterminer l'ensemble $\phi^{-1}(\mathcal{C}^*)$, ou $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \setminus \{(0, 0, L)\}$.

(d) En utilisant la formule de changement de variables, montrer que $V = \dfrac{L}{R}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{z'} r\,drdz'd\theta$. En déduire V.

Proof. (a) On trace un cône de révolution de base circulaire... **(1pt)**.
(b) En utilisant le Théorème de Fubini (on intègre une fonction mesurable positive sur un compact donc l'intégrale est absolument convergente), on obtient que

$$V = \int_0^L \int_{-|R(L-z)/L|}^{|R(L-z)/L|} \int_{-\sqrt{R^2(L-z)^2/L^2-y^2}}^{\sqrt{R^2(L-z)^2/L^2-y^2}} dxdydz = 2\int_0^L \int_{-|R(L-z)/L|}^{|R(L-z)/L|} \sqrt{R^2(L-z)^2/L^2 - y^2}dydz \qquad \textbf{(2pts)}.$$

(c) On a $z' = \frac{R}{L}(L - z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \mathrm{Arg}(x + iy)$: ceci donne l'expression de $\phi^{-1}(x, y, z)$), qui est bien bijective car $r > 0$ et θ est défini de manière unique dans $[0, 2\pi[$. De plus ϕ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ **(1.5pts)**. On a $\phi^{-1}(\mathcal{C}^*) = \{(r, \theta, z') \in \mathbf{R}^3,\ 0 < r < z',\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 < z' < R\}$ **(1pt)**.
(d) On montre facilement que le Jacobien de ce changement de variable est $|J| = \frac{L}{R}r$. On en déduit donc la formule de V **(1pt)**. Ainsi en utilisant Fubini, $V = 2\pi\dfrac{L}{R}\displaystyle\int_0^R [r^2/2]_0^{z'}dz' = \pi L\dfrac{R^2}{3}$ **(1.5pts)**. □