Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2013 – 2014

Analyse S4

Contrôle continu n°1, février 2014

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(12 points)** On définit $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi x)}{\ln(x)}\,dx$.

   (a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction $1/\ln(x)$ **(1pt)**.

   (b) Démontrer que I existe **(5pts)**.

   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|\cos(\dfrac{1}{2}\pi x)| \geq \dfrac{1}{2}(1+\cos(\pi x))$ **(2pts)**.

   (d) En déduire que I n'est pas absolument convergente **(4pts)**.

Proof. (a) La dérivée est $-1/(x\ln^2(x))$ **(0.5pts)** pour $x \in]0,1[\cup]1,\infty[$ **(0.5pts)**.

(b) La fonction $f(x) = \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi x)}{\ln(x)}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,\infty[$. Elle est donc localement prolongeable par continuité sur cet ensemble. Il y a donc 3 problèmes de convergence:
• en 0: on a $f(x) \to 0$ quand $x \to 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0 **(1pt)**.
• en 1: la limite en 1 est de type indéterminée 0/0. Il faut utiliser des développements limités en 1 pour en savoir plus. Il est clair qu'en 1, $\ln(x) \sim x-1$ et $\cos(\frac{\pi}{2}x) \sim (x-1)\big(-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2})\big)$, soit $\cos(\frac{1}{2}\pi x) \sim -\frac{\pi}{2}(x-1)$. On en déduit que $f(x) \to -\frac{\pi}{2}$ quand $x \to 1$. La fonction est donc prolongeable par continuité donc intégrable en 1 **(2pts)**.
• en $+\infty$: on utilise une intégration par parties, soit $\int_2^\infty f(x)dx = \big[\frac{2}{\pi\,\ln(x)}\sin(\frac{\pi}{2}x)\big]_2^\infty + \int_2^\infty \frac{2}{\pi\,x\ln^2(x)}\sin(\frac{\pi}{2}x)dx$. Mais $\frac{2}{\pi\,\ln(x)}\sin(\frac{\pi}{2}x) \to 0$ quand $x \to \infty$, donc $\big[\frac{2}{\pi\,\ln(x)}\sin(\frac{\pi}{2}x)\big]_2^\infty$ existe. De plus, $\big|\frac{2}{\pi\,x\ln^2(x)}\sin(\frac{\pi}{2}x)\big| \leq \frac{2}{\pi\,x\ln^2(x)}$ pour $x \geq 2$ et $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2(x)} = \big[-\frac{1}{\ln(x)}\big]_2^\infty$ qui existe. Donc grâce au théorème de comparaison, $\int_2^\infty \frac{2}{\pi\,x\ln^2(x)}\sin(\frac{\pi}{2}x)dx$ existe et ainsi $\int_2^\infty f(x)dx$ existe **(2pts)**.

(c) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|\cos(\dfrac{1}{2}\pi x)| \geq \cos^2(\dfrac{1}{2}\pi x)$ car $|\cos(\dfrac{1}{2}\pi x)| \leq 1$ et pour tout $|y| \leq 1$, $|y| \geq y^2$. Mais pour tout $z \in \mathbf{R}$, $\cos^2(z) = \frac{1}{2}(1+\cos(2z))$, donc $\cos^2(\frac{1}{2}\pi x) = \frac{1}{2}(1+\cos(\pi x))$, d'où le résultat **(2pts)**.

(d) On considère $\int_2^\infty |f(x)|dx$. La seule différence en ce qui concerne la convergence avec ce qui précède est en $+\infty$. Grâce à la majoration précédente, pour $M \geq 2$, $\int_2^M |f(x)|dx \geq \int_2^M \frac{dx}{2\ln(x)} + \int_2^M \frac{\cos(\pi x)}{2\ln(x)}dx$. En ce qui concerne la deuxième intégrale, on peut procéder exactement comme au (b), par intégration par parties, et on a clairement que $\lim_{M\to\infty}\int_2^M \frac{\cos(\pi x)}{2\ln(x)}dx$ qui converge **(2pts)**. Pour la première intégrale, on peut écrire par exemple, que pour $x \geq 1$, $\ln(x) \leq \sqrt{x}$ donc $\frac{1}{\ln(x)} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Or $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \infty$ (diverge) donc d'après le théorème de comparaison, $\int_2^\infty \frac{dx}{\ln(x)}$ diverge **(2pts)**. Par conséquent $\int_2^\infty |f(x)|dx$ diverge et I n'est donc pas absolument convergente.

□

2. **(10 points)** On considère l'ensemble Δ:

$$\Delta = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ |x|+|y| \leq 2\Big\}.$$

   (a) Tracer Δ **(2pt)**.

(b) Déterminer $\int\int_{\Delta} dxdy$ **(3pts)**.

(c) Déterminer $\int\int_{\Delta} \frac{dxdy}{(|x|+|y|)^2+4}$ (on pourra simplifier l'intégrale avec des considérations de symétrie et utiliser un changement de variables) **(5pts)**.

Proof. (a) La figure est celle du carré de longueur $2\sqrt{2}$, passant par les points $(0,2)$, $(2,0)$ et $(-2,0)$ **(2pts)**.

(b) Il s'agit donc de calculer la surface de Δ. D'après ce qui a été écrit au-dessus, cette surface est de $(2\sqrt{2})^2 = 8 = \int\int_{\Delta} dxdy$ **(3pts)**.

(c) Par symétrie, on a $\int\int_{\Delta} \frac{dxdy}{(|x|+|y|)^2+4} = 4\int\int_{\Delta'} \frac{dxdy}{(x+y)^2+4}$ et $\Delta' = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 2\right\}$ **(1.5pts)**. On peut opérer un changement de variables $x' = x$ et $y' = x+y$. C'est clairement un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et le jacobien associé à ce changement de variable vaut 1 **(1pt)**. Ainsi, $\int\int_{\Delta'} \frac{dxdy}{(x+y)^2+4} = \int_0^2\int_0^2 \frac{dx'dy'}{(y')^2+4} = 2\int_0^1 \frac{2dz}{4(z^2+1)} = \frac{\pi}{4}$ avec $y' = 2z$. En conséquence, $\int\int_{\Delta} \frac{dxdy}{(|x|+|y|)^2+4} = \pi$ **(1.5pts)**.

□