Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2014 – 2015

Analyse S4

Contrôle continu n°1, mars 2015

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(10 points)** Soit $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha\,|\ln(x)|^\beta}\,dx$ et $J_\gamma = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x^\gamma}{\sqrt{|\sin(x)|}}\,dx$. Déterminer l'ensemble des valeurs des réels α, β et γ tel que $I_{\alpha,\beta}$ **(5pts)**, puis J_γ **(5pts)**, convergent.

Proof. (a) La fonction $x \to e^{-\alpha\,|\ln(x)|^\beta}$ est continue donc localement intégrable sur $]0,1[\cup]1,\infty[$. Il y a donc des problèmes de convergence en 0, en $+\infty$ et en 1 si $\beta < 0$.
En $+\infty$, $\ln(x) \to \infty$, donc pour avoir convergence on a nécessairement $\beta > 0$ et $\alpha > 0$ car sinon $e^{-\alpha\,|\ln(x)|^\beta} \to \infty$ ou $e^{-\alpha\,|\ln(x)|^\beta} \to 1$ ce qui interdit la convergence de l'intégrale. Mais en $+\infty$, $x^c e^{-\alpha\,|\ln(x)|^\beta} = e^{c\ln x - \alpha\,\ln(x)^\beta} \to 0$ si $\beta > 1$ pour tout $c > 1$, donc il y a convergence quand $\beta > 1$. Si $\beta = 1$, et $\alpha > 1$, il suffit de prendre $1 < c < \alpha$ pour vérifier que $x^c e^{-\alpha\,|\ln(x)|^\beta} \to 0$. Si $0 < \beta < 1$ et $\alpha \le 1$, alors $e^{-\alpha\,|\ln(x)|^\beta} \ge x^{-1}$ et il y a donc divergence par le théorème de comparaison.
En 1, comme $\beta > 0$, il n'y a donc pas de problème de convergence.
En 0, si $\beta > 0$, comme $|\ln(x)|^\beta \to \infty$, alors il suffit d'avoir $\alpha > 0$ pour que $e^{-\alpha\,|\ln(x)|^\beta} \to 0$: la fonction est prolongeable par continuité et il n'y a pas de problème de convergence.
Conclusion: $I_{\alpha,\beta}$ est convergente si et seulement si $\beta > 1$ ou $\beta = 1$ et $\alpha > 1$.

(b) La fonction $x \to \frac{x^\gamma}{\sqrt{|\sin(x)|}}$ est continue donc localement intégrable sur $]0,\pi[$. Il y a donc des problèmes de convergence en 0 et en π.
En 0, $\sqrt{|\sin x|} \sim \sqrt{x}$ donc $\frac{x^\gamma}{\sqrt{|\sin(x)|}} \sim x^{\gamma-1/2}$ et d'après le théorème de comparaison, $\int_0^1 \frac{x^\gamma}{\sqrt{|\sin(x)|}}\,dx$ converge si $\gamma - 1/2 > -1$, soit $\gamma > -1/2$.
En π, un développement limité donne $\sin x \sim -(x-\pi)$, d'où $\frac{x^\gamma}{\sqrt{|\sin(x)|}} \sim \pi^\gamma |x-\pi|^{-1/2}$. Or $\int_1^\pi |x-\pi|^{-1/2}dx$ converge, donc d'après le théorème de comparaison, $\int_1^\pi \frac{x^\gamma}{\sqrt{|\sin(x)|}}\,dx$ converge pour tout $\gamma \in \mathbf{R}$.
Conclusion: $\int_0^\pi \frac{x^\gamma}{\sqrt{|\sin(x)|}}\,dx$ converge pour $\gamma > -1/2$.

□

2. **(11 points)** On considère l'ensemble Δ:

$$\Delta = \Big\{(x,y) \in [0,1]^2,\ x \le 1 - y^2\Big\}.$$

(a) Tracer Δ **(2pts)**.

(b) Déterminer $\displaystyle\int\!\!\int_\Delta dxdy$ **(3pts)**.

(c) Déterminer $\displaystyle\int\!\!\int_\Delta \frac{y(x+y^2)}{y^2+2}dxdy$ (on pourra utiliser le changement de variables $x' = 1 - x$ et $y' = y^2 + x$) **(6pts)**.

Proof. (a) On trace la fonction $y = \sqrt{1-x}$ et on en déduit Δ.

(b) On a $\displaystyle\int\!\!\int_\Delta dxdy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x}} dydx$ d'après le Théorème de Fubini. D'où $\displaystyle\int\!\!\int_\Delta dxdy = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = \Big[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$.

(c) Le changement de variable $x' = 1 - x$ et $y' = y^2 + x$ est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur l'ouvert de l'ensemble Δ (il y a un problème avec les différentielles en $(0,1)$ et $(1,0)$ pour la réciproque). On trouve que $x = 1 - x'$ et $y = \sqrt{y' + x' - 1}$ et ainsi le déterminant du Jacobien vaut $\frac{1}{2}(y' + x' - 1)^{-1/2}$. En conséquence, en utilisant le Théorème de Fubini,

$$
\begin{aligned}
\int\int_{\Delta} \frac{y(x+y^2)}{y^2+2} dxdy &= \int_0^1 \int_{1-x'}^1 \frac{y'\sqrt{y'+x'-1}}{(y'+x'+1)2\sqrt{y'+x'-1}} dy'dx' \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{1-x'}^1 \frac{y'}{y'+x'+1} dy'dx' \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{1-x'}^1 1 - \frac{x'+1}{y'+x'+1} dy'dx' \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \big(x' - (x'+1)(\ln(x'+2) - \ln 2)\big) dx' \\
&= \frac{1}{2}\Big(\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{(x+1)^2}{2}\ln(x+2) - x + \frac{1}{2}\ln(x+2) + \ln 2(\frac{x^2}{2} + x)\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x+2} dx\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} + 2\ln 2 - 2\ln 3 + \frac{1}{2}\big[\frac{1}{2}x^2 + x\big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x+1}{x+2} dx\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{5}{4} + 2\ln 2 - 2\ln 3 - \frac{1}{2}\int_0^1 1 - \frac{1}{x+2} dx\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(- \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\Big).
\end{aligned}
$$

$\square$