Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Analyse S4

Correction du contrôle continu n°2, avril 2009

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. Soit l'équation différentielle:

$$(E) \qquad x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 1 + x^2.$$

   (a) Déterminer sur quels ensembles résoudre cette équation.

   (b) Chercher une solution de l'équation homogène (EH) associée à (E) sous la forme $y(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

   (c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions maximales de (EH) est

$$\mathcal{H} = \Big\{ y :]-\infty, 0[\mapsto \frac{\lambda}{x} + \mu \, \frac{\ln|x|}{x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \Big\} \bigcup \Big\{ y :]0, \infty[\mapsto \frac{\lambda}{x} + \mu \, \frac{\ln|x|}{x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \Big\}.$$

   (d) Chercher une solution particulière de (E). En déduire l'ensemble des solutions de (E).

   (e) Montrer qu'il existe une unique solution maximale de (E) sur $\mathbf{R}$.

Proof. (a) L'équation s'écrit encore $y''(x) + \frac{3}{x} y'(x) + \frac{1}{x^2} y(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$. Aussi doit on avoir $x \neq 0$. On pourra donc résoudre cette équation sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, \infty[$, car les fonctions $x \mapsto \frac{3}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ sont continues sur ces ensembles.

(b) Pour $y(x) = x^\alpha$, alors $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ avec $x \neq 0$. Doc y est solution de (EH) si $\alpha(\alpha-1)x^\alpha + 3\alpha x^\alpha + x^\alpha = 0$ pour $x \in]-\infty, 0[$ ou $]0, \infty[$. Cela revient à $\alpha(\alpha-1) + 3\alpha + 1 = 0$, soit $(\alpha+1)^2 = 0$ et donc $\alpha = -1$. Ainsi $y_1(x) = 1/x$ est solution de (EH) sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, \infty[$.

(c) On peut poser $y(x) = c(x)/x$ comme solution de (EH). Alors $y'(x) = c'(x)/x - c(x)/x^2$ et $y''(x) = c''(x)/x - 2c'(x)/x^2 + 2c(x)/x^3$. Aussi si y est solution de (EH) alors $xc''(x) - 2c'(x) + 3c'(x) = 0$ donc $C'(x) + C(x)/x = 0$ avec $C(x) = c'(x)$. On connaît l'ensemble des solutions de l'équation $y' + y/x = 0$ puisque c'est une équation différentielle du premier ordre. Aussi a-t-on $C(x) = \lambda \exp(-\int_{x_0}^x \frac{1}{x} dx) = \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Aussi on obtient $c(x) = \lambda \ln|x| + \mu$ avec $\mu \in R$ et donc on obtient $y_2(x) = \frac{\ln|x|}{x}$ comme autre solution de (EH), solution non liée avec $y_1(x) = 1/x$. En conséquence, l'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions de (EH) est:

$$\mathcal{H} = \Big\{ y :]-\infty, 0[\mapsto \frac{\lambda}{x} + \mu \, \frac{\ln|x|}{x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \Big\} \bigcup \Big\{ y :]0, \infty[\mapsto \frac{\lambda}{x} + \mu \, \frac{\ln|x|}{x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \Big\}$$

(d) On peut utiliser le principe de superposition pour traiter séparément le second membre $b_1(x) = \frac{1}{x^2}$ du second membre $b_2(x) = 1$, dans l'équation écrire sous la forme $y''(x) + \frac{3}{x} y'(x) + \frac{1}{x^2} y(x) = \frac{1}{x^2} + 1$.
pour $b_1(x) = \frac{1}{x^2}$, il est clair que $\tilde{y}_1(x) = 1$ est solution.
pour $b_2(x) = 1$, on peut utiliser le principe de variations des constantes et poser qu'une solution particulière de (E) s'écrira sous la forme $\tilde{y}_2(x) = \frac{\lambda(x)}{x} + \mu(x) \frac{\ln|x|}{x}$. On sait qu'alors on devra résoudre le système:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & -\frac{\ln|x|}{x^2} + \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x} & \frac{\ln|x|}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(x) \\ \mu'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De ceci, on obtient le système $\left\{ \begin{array}{lcl} -\lambda'(x) + \mu'(x)(1 - \ln|x|) & = & x^2 \\ \lambda'(x) + \mu'(x) \ln|x| & = & 0 \end{array} \right.$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$ ou $]0, \infty[$. On en déduit que $\mu'(x) = x^2$ et $\lambda'(x) = -x^2 \ln|x|$, soit $\mu(x) = \frac{1}{3}x^3$ et $\lambda(x) = -\int^x t^2 \ln|t| dt = -\frac{1}{3}x^3 \ln|x| + \frac{1}{9}x^3$ par intégration par parties (on choisit une seule primitive, les autres donnant des solutions de $\mathcal{H}$). Par conséquent, $\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{9}x^2$. De ceci on en déduit que l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (E) est:

$$\mathcal{E} = \left\{y :]-\infty, 0[\mapsto 1 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{\lambda}{x} + \mu \frac{\ln|x|}{x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\} \bigcup \left\{y :]0, \infty[\mapsto 1 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{\lambda}{x} + \mu \frac{\ln|x|}{x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

(e) Il est clair que pour que $\frac{\lambda}{x}$ et $\mu \frac{\ln|x|}{x}$ existent et soient continues sur $\mathbf{R}$, il faut que $\lambda = \mu = 0$. En revanche $x \mapsto 1 + \frac{1}{9}x^2$ existe bien et est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$. Aussi $y(x) = 1 + \frac{1}{9}x^2$ est l'unique solution maximale de (E) définie sur $\mathbf{R}$. □

2. Soit $\theta \in]0, \pi[$ et la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n(n+1)} x^n$.

   (a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

   (b) Montrer que si $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n(n+1)} x^n$ alors S est définie sur $[-1, 1]$.

   (c) Montrer que S est continue sur $[-1, 1]$.

   (d) Expliquer pourquoi S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

   (e) Donner l'expression sous forme de série entière de $g(x) = x^2 S'(x)$, puis, après justifications, en déduire que $g'(x) = \sum_{n=1}^\infty \cos(n\theta) x^n$ pour $x \in]-1, 1[$.

   (f) Rappeler la valeur de $\sum_{n=1}^\infty z^n$ (valable pour quelles valeurs de $z \in \mathbf{C}$?). En écrivant $\cos(n\theta)$ sous la forme d'une exponentielle complexe, en déduire que $g'(x) = \dfrac{x(\cos\theta - x)}{(x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$ pour $x \in]-1, 1[$.

   (g) **(Question facultative et difficile...)** Avec ce dernier résultat montrer que S est dérivable sur $[-1, 1]$, mais que la dérivée seconde de S n'existe pas en 1 et en -1.

   (h) Dans le cas où $\theta = \pi/2$, en déduire $g(x)$ pour $x \in]-1, 1[$, puis à l'aide d'intégrations par parties en déduire que pour $x \in]-1, 1[$,

$$S(x) = 1 - \frac{\text{Arctan}(x)}{x} - \frac{1}{2}\log(1 + x^2) \ \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \ S(0) = 0.$$

   En justifiant, déduire de ceci la valeur exacte de $S(1)$ pour $\theta = \pi/2$. Comment $S(1)$ peut-elle encore s'écrire sous la forme de série entière (sans cosinus)?

Proof. (a) On peut utiliser le critère de Cauchy. Ainsi $\left|\frac{\cos(n\theta)}{n(n+1)}\right| = \exp\left(\frac{1}{n}\log\left|\frac{\cos(n\theta)}{n(n+1)}\right|\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ parce que $\left|\frac{1}{n}\log\left|\frac{\cos(n\theta)}{n(n+1)}\right|\right| \leq \frac{1}{n}\log|n(n+1)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $R = 1$.
(b) On sait que $S(x)$ est définie pour $|x| < 1$ par définition du rayon de convergence. De plus, pour $x = 1$ ou $x = -1$, alors $\left|\frac{\cos(n\theta)}{n(n+1)}x^n\right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Comme $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann), d'après le théorème de comparaison des séries numériques à termes positifs car $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge et donc S est définie en 1 et -1.
(c) $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\theta)}{n(n+1)}x^n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-1, 1]$ car $\sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{\cos(n\theta)}{n(n+1)}x^n\right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge. De plus à n fixé, $x \mapsto \frac{\cos(n\theta)}{n(n+1)}x^n$ est continue sur $\mathbf{R}$. Donc d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, S est continue sur $[-1, 1]$.
(d) D'après le cours, S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, donc sur $]-1, 1[$.
(e) D'après le cours, pour $x \in]-1, 1[$, on a $S'(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\theta)}{n+1}x^{n-1}$. Ainsi $g(x) = x^2 S'(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\theta)}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n\geq 2}\frac{\cos((n-1)\theta)}{n}x^n$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ et la fonction $x \mapsto S'(x)$ sont dérivables sur $]-1, 1[$, leur produit

l'est également et g est donc dérivable $]-1,1[$. Par suite, comme g est développable en série entière on sait que l'on peut dériver directement la série entière et donc $g'(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\cos((n-1)\theta)}{n} n\, x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \cos(n\theta) x^n$.

(f) On sait que pour $|z|<1$ la fonction $\dfrac{1}{1-z}$ est développable en série entière et $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n\geq 0} z^n$.

On peut écrire que $\cos(n\theta) = \mathcal{R}e(e^{in\theta})$ donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos(n\theta)x^n = \mathcal{R}e\Big(\sum_{n\geq 1} \big(x\, e^{i\theta}\big)^n\Big)$. En posant $z = x\, e^{i\theta}$ et parce que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} z^n = \frac{1}{1-z} - 1 = \frac{z}{1-z}$, on a donc pour tout $x \in]-1,1[$,

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos(n\theta)x^n = \mathcal{R}e\Big(\frac{x\, e^{i\theta}}{1-x\, e^{i\theta}}\Big) = \mathcal{R}e\Big(\frac{x\, e^{i\theta}(1-x\, e^{-i\theta})}{(1-x\, e^{i\theta})(1-x\, e^{-i\theta})}\Big) = \frac{x\cos\theta - x^2}{(1-x\cos\theta)^2 + x^2\sin^2\theta} = \frac{x(\cos\theta - x)}{(x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$.

(g) Pour $x \in]-1,1[$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n+1} x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos((n+1)\theta)}{n+2} x^n$. Mais la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos((n+1)\theta)}{n+2} x^n$ converge uniformément sur $[-1,1]$. En effet, pour $x \in [-1,1]$, son reste $R_n(x)$ d'ordre n est $\displaystyle\sum_{k\geq n+1} \frac{\cos((k+1)\theta)}{k+2} x^k$.

On peut écrire cette série sous la forme $\displaystyle\frac{1}{x} \sum_{k\geq n+2} \frac{\cos(k\theta)}{k+1} x^k$ et utiliser ensuite la transformation d'Abel. En effet, soit $T_n(x) = \displaystyle\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) x^k$. D'après la question précédente, pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \frac{\cos\theta - x}{(x-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$ donc comme $\theta \in]0,\pi[$, alors pour tout $x \in [-1,1]$, $(x-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta \geq \sin^2(\theta) > 0$ et $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} \big|T_n(x)\big| \leq M(\theta) < \infty$.

Donc pour $N \geq n+3$ alors $\displaystyle\sum_{k=n+2}^{N} \frac{T_{k+1}(x) - T_k(x)}{k+1} = \sum_{k=n+3}^{N+1} \frac{T_k(x)}{k} - \sum_{k=n+2}^{N} \frac{T_k(x)}{k} = \frac{T_{N+1}(x)}{N+1} - \frac{T_{n+2}(x)}{n+2} + \sum_{k=n+3}^{N} \frac{T_k(x)}{k(k+1)}$. Du fait que $T_n(x)$ est bornée, on en déduit que $\displaystyle\Big|\sum_{k=n+2}^{N} \frac{T_{k+1}(x)-T_k(x)}{k+1}\Big| \leq M(\theta)\Big(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{n+2} + \sum_{k=n+3}^{N} \frac{1}{k(k+1)}\Big)$. Comme $\displaystyle\sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ converge, on peut donc passer à la limite quand $N \to \infty$ et on a donc $\displaystyle\big|R_n(x)\big| \leq M(\theta)\Big(\frac{1}{n+2} + \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\Big)$. De ceci on en déduit que $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} \big|R_n(x)\big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc il y a bien convergence uniforme sur $[-1,1]$.
On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions et on déduit que S est dérivable sur $[-1,1]$.
En revanche, S n'est pas deux fois dérivable en 1 et en -1 car si la dérivée seconde existait en $x=-1$ et en 1 alors elle vaudrait $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \cos(n\theta) \frac{n-1}{n+1} x^{n-2}$ et le terme général de cette série ne tendant pas vers 0, elle diverge.

(h) Dans le cas $\theta = \pi/2$ alors $g'(x) = -\dfrac{x^2}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} - 1$. Une primitive de cette fonction est $\mathrm{Arctan}(x) - x + c$ avec $c \in \mathbf{R}$. Comme $g(0) = 0$ on en déduit que $g(x) = \mathrm{Arctan}(x) - x$. Par suite, pour $x \neq 0$, $S'(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.
Il revient donc de trouver une primitive de cette fonction. Pour $\varepsilon > 0$,
$\displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{Arctan}(t) - t}{t^2} dt = \int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^2} dt - (\ln|x| - \ln\varepsilon)$. On calcule l'intégrale par intégration par parties et $\displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^2} dt = -\Big[\frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\Big]_\varepsilon^x + \int_\varepsilon^x \frac{1}{t(t^2+1)} dt$. Comme $\dfrac{1}{t(t^2+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{t^2+1}$, on en déduit que $\displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^2} dt = -\Big[\frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t} + \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big]_\varepsilon^x$, d'où $\displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{Arctan}(t)-t}{t^2} dt = -\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{\mathrm{Arctan}(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln(1+\varepsilon^2)$.
La limite quand $\varepsilon \to 0$ existant on obtient que $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{Arctan}(t)-t}{t^2} dt = -\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 1 = S(x)$ (car $S(0) = 0$) pour $|x| < 1$.
Par continuité de S sur $[-1,1]$, on déduit que $S(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1^-} S(x) = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$. Enfin, comme pour $p \in \mathbf{N}$, $\cos(2p\pi/2) = (-1)^p$ et $\cos((2p+1)\pi/2) = 0$, on obtient donc que $S(1) = \displaystyle\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p}{2p(2p+1)}$. $\square$