Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 – 2010

Analyse S4

Contrôle continu n°2, mai 2010

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 12 points)** Par le biais de convergence d'intégrales, on peut montrer le théorème de la limite centrale pour des échantillons gaussiens...
   (a) Montrer que $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) On pose $g_n(x) = (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \times \mathbb{I}_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]}(x)$ avec $\mathbb{I}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{I}_A(x) = 0$ sinon. Montrer que $J_n = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Montrer que pour $0 \leq u \leq 1$, $\ln(1+u) \geq \frac{u}{2}$.
   (d) Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-\frac{1}{4}x^2\big)dx$ converge.
   (e) En déduire $J = \lim_{n\to\infty} J_n$ existe et on exprimera J sous forme d'une intégrale.
   (f) En déduire également que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ (on pourra utiliser un changement de variable).

2. **(Sur 11 points)** On considère la fonction F où
$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(x\ t)}{t}\, dt.$$
   (a) Montrer F est définie sur $D =]-1, 1[$.
   (b) Montrer que F est une fonction impaire sur D.
   (c) Montrer que F est continue sur D.
   (d) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et donner l'expression de $F'(x)$.
   (e) Calculer explicitement $F'(x)$ et déterminer $\lim_{x\to 1} F'(x)$.