Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 − 2010

Analyse S4

Correction du contrôle continu n°2, mai 2010

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 12 points)** Par le biais de convergence d'intégrales, on peut montrer le théorème de la limite centrale pour des échantillons gaussiens...

   (a) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) On pose $g_n(x) = (1+\dfrac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \times \mathbb{I}_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]}(x)$ avec $\mathbb{I}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{I}_A(x) = 0$ sinon. Montrer que $J_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (c) Montrer que pour $0 \le u \le 1$, $\ln(1+u) \ge \dfrac{u}{2}$.

   (d) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-\frac{1}{4}x^2\big)dx$ converge.

   (e) En déduire $J = \lim_{n\to\infty} J_n$ existe et on exprimera J sous forme d'une intégrale.

   (f) En déduire également que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ (on pourra utiliser un changement de variable).

Proof. (a) La fonction $f_n(x) = \big(1+\frac{x^2}{n}\big)^{-\frac{n+1}{2}}$ est continue, donc localement intégrable sur $\mathbf{R}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Il y a donc un problème de convergence en ∞ et $-\infty$. Comme la fonction f_n est paire, le cas $-\infty$ revient au cas $+\infty$, que nous traiterons donc uniquement. Pour $n \ge 1$, alors quand $x \to \infty$, $f_n(x) \sim c_n\, x^{-(n+1)}$ avec $c_n = n^{(n+1)/2}$ et comme $\int_1^\infty x^{-(n+1)}dx$ converge dès que $n \ge 1$, on en déduit d'après le Théorème de comparaison des intégrales que $\int_1^\infty f_n(x)dx$ converge donc I_n existe pour tout $n \ge 1$ **[2pts]**.
(b) Il est clair que $J_n = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} f_n(x)dx$ est une intégrale définie donc elle existe **[1pt]**.
(c) Soit $h(u) = \ln(1+u) - \frac{u}{2}$ pour $u \in [0,1]$. h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et $h'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2} \ge 0$ pour tout $u \in [0,1]$. Donc h est croissante sur $[0,1]$ et comme $h(0) = 0$, on en déduit que $h(u) \ge 0$ pour tout $u \in [0,1]$ **[1pt]**.
(d) Le problème de convergence a lieu en $\pm\infty$ et on peut par parité se contenter du problème en $+\infty$. Comme $\lim_{x\to\infty} x^2 \exp\big(-\frac{1}{4}x^2\big) = 0$ (comparaison entre fonction puissance et exponentielle), d'après le critère de Riemann, on en déduit que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-\frac{1}{4}x^2\big)dx$ converge **[2pts]**.
(e) On a $g_n(x) = \exp\big(-\frac{n+1}{2}\ln\big(1+\frac{x^2}{n}\big)\big)\mathbb{I}_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]}(x)$. Or pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln\big(1+\frac{x^2}{n}\big) \sim \frac{x^2}{n}$ quand $n \to \infty$, donc $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \exp(-\frac{1}{2}x^2) = g(x)$ car $\lim_{n\to\infty} \mathbb{I}_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]}(x) = 1$. De plus, pour $x \in \mathbf{R}$ et $x \in [-\sqrt{n},\sqrt{n}]$, $0 \le \frac{x^2}{n} \le 1$ et donc $\ln\big(1+\frac{x^2}{n}\big) \ge \frac{x^2}{2n}$ d'après le résultat précédent. Ainsi $g_n(x) \le \exp\big(-\frac{n+1}{4n}x^2\big)\mathbb{I}_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]}(x) \le \exp\big(-\frac{1}{4}x^2\big)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$. Enfin $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-\frac{1}{4}x^2\big)dx$ converge.
De ces deux éléments, on peut donc appliquer le Théorème de Lebesgue et on a donc

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx \quad \textbf{[3.5pts]}.$$

(f) $|I_n - J_n| = 2\displaystyle\int_{\sqrt{n}}^{\infty} f_n(x)dx = 2\sqrt{n}\int_1^\infty \big(1+y^2\big)^{-\frac{n+1}{2}}dy \le 2\sqrt{n}\int_1^\infty y^{-(n+1)}dy \le 2\sqrt{n}\Big[-\frac{1}{n}y^{-n}\Big]_1^\infty \le \frac{2}{\sqrt{n}}$. Par suite, $\lim_{n\to\infty}|I_n - J_n| = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ **[2.5pts]**.

∎

2. **(Sur 11 points)** On considère la fonction F où

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(x\ t)}{t}\, dt.$$

(a) Montrer F est définie sur $D =]-1, 1[$.

(b) Montrer que F est une fonction impaire sur D.

(c) Montrer que F est continue sur D.

(d) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et donner l'expression de $F'(x)$.

(e) Calculer explicitement $F'(x)$ et déterminer $\lim_{x\to 1} F'(x)$.

Proof. (a) Pour $x \in D$, on a $|x\ t| < \pi/2$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$. Donc la fonction $t \to \tan(x\ t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$. On en déduit que pour tout $x \in D$, $t \to f(x,t) = \frac{\tan(x\ t)}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D \times]0, \pi/2]$. Le seul problème de convergence de l'intégrale est donc en 0. Mais $\tan(x\ t) \sim x\ t$ pour t proche de 0, donc f est prolongeable par continuite en $(x, 0)$ par x. En conséquence F est bien définie sur D **[2pts]**.
(b) On a clairement $F(-x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(-x\ t)}{t}\, dt = -F(x)$ pour tout $x \in D$ **[0.5pts]**.
(c) La fonction f prolongée par continuité, que l'on peut appelée g, est donc continue sur $D \times [0, \pi/2]$. De plus $F(x) = \int_0^{\pi/2} g(x,t)dx$ donc comme F est définie par une intégrale sur un compact, d'après le Théorème de continuité des intégrales sur un compact dépendant d'un paramètre, F est continue sur D **[3pts]**.
(d) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = 1 + \tan^2(x\ t)$, donc cette dérivée partielle existe et est continue sur $D \times [0, \pi/2]$. Donc d'après le Théorème de dérivation des intégrales sur un compact dépendant d'un paramètre, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D **[3pts]**.
On a ainsi $F'(x) = \int_{-1}^{1} (1 + \tan^2(x\ t))dt$ pour tout $x \in D$ **[0.5pt]**.
(e) Il est clair que $\dfrac{\partial}{\partial t} \tan(x\ t) = x(1 + \tan^2(x\ t))$. En conséquence, pour tout $x \in D$,

$$F'(x) = \Big[\frac{1}{x}\ \tan(x\ t)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{x}\ \tan(\pi x/2) \quad \textbf{[1.5pt]}.$$

Par suite on a donc $\lim_{x\to 1} F'(x) = +\infty$ **[0.5pt]**. $\square$