Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année $2009-2010$

Analyse S4

Contrôle continu n°2, avril 2011

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 11 points)** Soit l'équation différentielle:

$$(E) \qquad x^3 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 1.$$

   (a) Déterminer les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales de (E).

   (b) Déterminer une solution évidente de l'équation homogène (EH) associée à (E) sous la forme d'un polynôme de degré 1.

   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (EH).

   (d) A l'aide de la méthode de variations des constantes montrer qu'une solution particulière de (E) est $\tilde{y}(x) = -\frac{x}{2}e^{-1/x}$.

   (e) En déduire la solution générale de (E). Peut-on la prolonger en une solution sur $\mathbf{R}$?

2. **(Sur 11 points)** Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$. On considère la fonction F où

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, \sin(x-t)\, dt.$$

   (a) Montrer que F est définie sur $\mathbf{R}$. Que vaut $F(0)$?

   (b) Montrer que F est une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

   (c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et donner l'expression de $F'(x)$. Que vaut $F'(0)$?

   (d) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et donner l'expression de $F''(x)$.

   (e) En déduire que F est solution de l'équation différentielle $y''(x)+y(x) = f(x)$ avec la condition initiale $y(0) = y'(0) = 0$.

   (f) Dans le cas où $f(x) = \cos(x)$ résoudre l'équation différentielle précédente et en déduire F. Retrouver ce résultat en utilisant directement la formule intégrale de F.