Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 – 2010

Analyse S4

Correction du Contrôle continu n°2, avril 2011

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 11 points)** Soit l'équation différentielle:

$$(E) \qquad x^3y''(x) - xy'(x) + y(x) = 1.$$

   (a) Déterminer les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales de (E).

   (b) Déterminer une solution évidente de l'équation homogène (EH) associée à (E) sous la forme d'un polynôme de degré 1.

   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (EH).

   (d) A l'aide de la méthode de variations des constantes montrer qu'une solution particulière de (E) est $\tilde y(x) = -\frac{x}{2}e^{-1/x}$.

   (e) En déduire la solution générale de (E). Peut-on la prolonger en une solution sur $\mathbf{R}$?

Proof. (a) (E) s'écrit encore $y''(x) - y'(x)/x^2 + y(x)/x^3 = 1/x^3$ donc on cherchera des solutions maximales sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, \infty[$ **(1pt)**.
(b) On voit aisément que $y(x) = x$ est solution de l'équation (EH) **(1pt)**.
(c) On pose alors $y(x) = xz(x)$ **(0.5pts)**. Alors $y'(x) = z(x) + xz'(x)$ et $y''(x) = xz''(x) + 2z'(x)$. Si y solution de (EH) alors $x^4z''(x) + 2x^3z'(x) - xz'(x) = 0$ soit $Z'(x) - (x^{-2} - 2x^{-1})Z = 0$ (en posant $Z = z'$) **(1pt)**d'où avec $\lambda \in \mathbf{R}$, $Z(x) = \lambda \exp\big(x^{-1} - 2\ln(x)\big) = \lambda\frac{1}{x^2}\exp\big(1/x\big)$ **(1pt)**. Ainsi $z'(x) = \lambda\frac{1}{x^2}\exp\big(1/x\big)$ soit $z(x) = -\lambda\exp\big(1/x\big) + c$. On en déduit donc que l'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions de (EH) est:

$$\mathcal{H} = \big\{x \in I_1 \mapsto \lambda\, x\, e^{1/x} + \mu\, x,\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2\big\} \bigcup \big\{x \in I_2 \mapsto \lambda\, x\, e^{1/x} + \mu\, x,\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2\big\}. \quad \textbf{(0.5pts)}$$

(d) En posant $\tilde y(x) = \lambda(x)\, x\, e^{1/x} + \mu(x)\, x$, on obtient par la méthode de variation des constantes l'équation matricielle:

$$\begin{pmatrix} (1 - x^{-1})e^{1/x} & 1 \\ x\, e^{1/x} & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(x) \\ \mu'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1pt)}$$

De ceci, on en déduit que $-x^{-1}e^{1/x}\mu'(x) = x^{-3}$ et $\lambda'(x) = -\mu'(x)e^{-1/x}$, soit $\mu'(x) = -x^{-2}e^{-1/x}$ et $\lambda'(x) = x^{-2}e^{-2/x}$. Cela conduit à $\mu(x) = -e^{-1/x}$ et à $\lambda(x) = \frac{1}{2}e^{-2/x}$. Ainsi on trouve comme solution particulière: $\tilde y(x) = \lambda(x)\, x\, e^{1/x} + \mu(x)\, x = -\frac{x}{2}e^{-1/x}$ **(3pts)**.
(e) La solution générale de (E) sur I_1 et sur I_2 est $y(x) = \lambda(x)\, x\, e^{1/x} + \mu(x)\, x - \frac{x}{2}e^{-1/x}$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$ **(0.5pts)**. Il est clair que $\tilde y$ n'est pas continue en 0 donc on ne peut pas prolonger la solution sur $\mathbf{R}$ **(0.5pts)**.

□

2. **(Sur 11 points)** Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$. On considère la fonction F où

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, \sin(x - t)\, dt.$$

   (a) Montrer que F est définie sur $\mathbf{R}$. Que vaut $F(0)$?

   (b) Montrer que F est une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

(c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et donner l'expression de $F'(x)$. Que vaut $F'(0)$?

(d) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et donner l'expression de $F''(x)$.

(e) En déduire que F est solution de l'équation différentielle $y''(x)+y(x)=f(x)$ avec la condition initiale $y(0)=y'(0)=0$.

(f) Dans le cas où $f(x)=\cos(x)$ résoudre l'équation différentielle précédente et en déduire F. Retrouver ce résultat en utilisant directement la formule intégrale de F.

Proof. (a) Pour tout $x\in\mathbf{R}$, $F(x)$ est une intégrale d'une fonction continue (car f continue et $t\to\sin(x-t)$ également) sur un compact ($[0,x]$) donc $F(x)$ est définie **(1pt)**. On a $F(0)=0$ de manière évidente **(0.5pts)**.
(b) Soit $a>0$. Pour tout $x\in[-a,a]$, F s'écrit sous la forme $\int_0^x g(x,t)dt$ avec g une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$ et en notant $g_0(t)=|f(t)|\mathbb{I}_{|t|\le a}$ on a $\int_{-\infty}^{\infty} g_0(t)dt<\infty$. Donc d'après le Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, F est continue sur $[-a,a]$ pour tout $a>0$, donc F est continue sur $\mathbf{R}$ **(2pts)**.
(c) Soit $a>0$. Pour tout $x\in[-a,a]$, $\partial g/\partial x(x,t)=f(t)\cos(x-t)$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$. De plus on a aussi $\left|\partial g/\partial x(x,t)\right|\le g_0(t)$ avec $g_0(t)=|f(t)|\mathbb{I}_{|t|\le a}$ et $\int_{-\infty}^{\infty} g_0(t)dt<\infty$. Donc avec le point (b), on en déduit grâce au Théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre que F est classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$ pour tout $a>0$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. De plus on sait que la dérivée de $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x,t)dt$ lorsqu'elle existe vaut $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial g/\partial x(x,t)dt+\beta'(x)g(x,\beta(x))-\alpha'(x)g(x,\alpha(x))$. Appliqué ici, on obtient que $F'(x)=\int_0^x f(t)\cos(x-t)dt+0$ pour tout $x\in\mathbf{R}$ **(3pts)**. On a bien-sûr $F'(0)=0$ **(0.5pts)**.
(d) On peut appliquer exactement le même raisonnement à F' que celui appliqué à F. Et on a donc F' qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, donc F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et $F''(x)=-\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt+f(x)$ pour $x\in\mathbf{R}$ **(1pt)**.
(e) De ce qui précède, on a donc bien F solution de l'équation différentielle $y''(x)+y(x)=f(x)$ avec la condition initiale $y(0)=y'(0)=0$, ce qui donne une définition unique de F **(1pt)**.
(f) On résoud d'abord l'équation homogène associée à (E) : $\quad y''(x)+y(x)=f(x)$, soit $y''(x)+y(x)=0$; on obtient que $y(x)=\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)$ avec $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. Ensuite on cherche une solution particulière. Comme $\cos x$ est déjà solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière sous la forme $\tilde{y}(x)=x(a\cos x+b\sin x)$. On a ainsi $\tilde{y}'(x)=x(-a\sin x+b\cos x)+(a\cos x+b\sin x)$ et $\tilde{y}''(x)=-x(a\cos x+b\sin x)+(-2a\sin x+2b\cos x)$. Donc $\tilde{y}''(x)+\tilde{y}(x)=\cos x$ conduit à $(-2a\sin x+2b\cos x)=\cos x$ pour tout $x\in\mathbf{R}$, d'où $a=0$ et $b=1/2$: la solution générale de (E) est donc: $y(x)=\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)+\frac{1}{2}x\sin x$. Du fait des conditions $y(0)=y'(0)=0$, on obtient $\alpha=0$ et $\beta=0$ donc $F(x)=\frac{1}{2}x\sin x$ **(2pts)**.
Si on reprend l'expression de F on a $F(x)=\int_0^x \sin(x-t)\cos t dt=\frac{1}{2}\int_0^x(\sin x+\sin(x-2t))dt=\frac{1}{2}x\sin x+\big[\cos(x-2t)\big]_0^x=\frac{1}{2}x\sin x$ **(1pt)**. □