Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 – 2012

Analyse S4

Contrôle continu n°2, avril 2012

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 11 points)** Soit l'équation différentielle:

$$(E) \qquad x^6\,y^{(3)}(x)+6\,x^5\,y''(x)+6x^4y'(x)-8\,y(x)=\frac{1}{|x|}.$$

   (a) Déterminer les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales de (E) **(0.5 pts)**.

   (b) On pose $t=1/x$ et $y(x)=z(t)=z(1/x)$ pour $t\neq 0$. Déterminer les dérivées (par rapport à t) $y^{(k)}(1/t)$ pour $k=1,2$ et 3 **(1.5 pts)**. En déduire que (E) s'écrit encore:

$$(E') \qquad z^{(3)}(t)+8\,z(t)=-|t|. \quad \textbf{(2pts)}$$

   (c) Déterminer les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales de (E') **(0.5 pts)**. Déterminer la solution générale de l'équation homogène (EH') associée à (E') **(3 pts)**.

   (d) Déterminer une solution particulière de (E') (on pourra considérer les cas $t>0$ et $t<0$) **(1 pt)**. En déduire l'ensemble des solutions maximales de (E') **(0.5 pts)**.

   (e) En déduire l'ensemble des solutions de (E) **(1 pt)**. Peut-on trouver une solution maximale définie sur $\mathbf{R}$? **(1 pt)**

2. **(Sur 12 + 5 points)** On considère la fonction F où

$$F(x)=\int_1^{\infty}\frac{t-1}{t^x\,\ln(t)}\,dt,$$

   et on note $f(x,t)=\dfrac{t-1}{t^x\,\ln(t)}$ pour $(x,t)\in\mathbf{R}\times[1,\infty[$.

   (a) Montrer que $\ln(t)\sim t-1$ lorsque $t\to 1$ **(0.5 pts)**. Pour $x\in\mathbf{R}$, préciser des équivalents de $f(x,t)$ quand $t\to 1$ **(0.5 pts)** et quand $t\to+\infty$ **(1 pt)**.

   (b) Montrer qu'une primitive de $1/t\ln(t)$ est $\ln(\ln(t))$ pour $t>1$ **(0.5 pts)**. En déduire que $F(2)$ diverge **(0.5 pts)**.

   (c) Montrer que le domaine de définition de F est $]2,\infty[$ **(2 pts)**.

   (d) Soit $a>2$. Montrer que F est une fonction continue sur $[a,+\infty[$ **(2 pts)**. Sur quel domaine F est-elle en réalité continue? **(0.5 pts)**

   (e) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]2,+\infty[$ **(3 pts)** et donner l'expression sous forme d'intégrale de $F'(x)$ **(0.5 pts)**. En déduire que $F'(x)=\frac{1}{2-x}-\frac{1}{1-x}$ pour tout $x>2$ **(1 pt)**.

   (f) **(Question subsidiaire: 5 points)** Déterminer la limite de $F(n)$ lorsque $n\to\infty$ **(1.5 pts)**. En utilisant le signe de F', en déduire $\lim_{x\to\infty}F(x)$ **(2 pts)**. En déduire l'expression de $F(x)$ pour tout $x>2$ **(1.5 pts)**.