Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 – 2012

Analyse S4

Contrôle continu n°2, avril 2012

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 11 points)** Soit l'équation différentielle:

$$(E) \qquad x^6\, y^{(3)}(x) + 6\, x^5\, y''(x) + 6x^4 y'(x) - 8\, y(x) = \frac{1}{|x|}.$$

   (a) Déterminer les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales de (E) **(0.5 pts)**.

   (b) On pose $t = 1/x$ et $y(x) = z(t) = z(1/x)$ pour $t \neq 0$. Déterminer les dérivées (par rapport à t) $y^{(k)}(1/t)$ pour $k = 1, 2$ et 3 **(1.5 pts)**. En déduire que (E) s'écrit encore:

$$(E') \qquad z^{(3)}(t) + 8\, z(t) = -|t|. \quad \textbf{(2pts)}$$

   (c) Déterminer les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales de (E') **(0.5 pts)**. Déterminer la solution générale de l'équation homogène (EH') associée à (E') **(3 pts)**.

   (d) Déterminer une solution particulière de (E') (on pourra considérer les cas $t > 0$ et $t < 0$) **(1 pt)**. En déduire l'ensemble des solutions maximales de (E') **(0.5 pts)**.

   (e) En déduire l'ensemble des solutions de (E) **(1 pt)**. Peut-on trouver une solution maximale définie sur $\mathbf{R}$? **(1 pt)**

Proof. (a) (E) se réécrit $y^{(3)}(x) + 6\, x^{-1}\, y''(x) + 6x^{-2} y'(x) - 8\, x^{-6} y(x) = \frac{1}{x^6|x|}$ donc les fonctions intervenant dans cette équation sont continues sur $\mathbf{R}^*$: on peut chercher des solutions maximales sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, \infty[$.
(b) On a $\frac{\partial}{\partial t} y(1/t) = -\frac{1}{t^2} y'(1/t)$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(1/t) = \frac{2}{t^3} y'(1/t) + \frac{1}{t^4} y''(1/t)$ et $\frac{\partial^3}{\partial t^3} y(1/t) = -\frac{6}{t^4} y'(1/t) - \frac{6}{t^5} y''(1/t) - \frac{1}{t^6} y^{(3)}(1/t)$. On en déduit que $y(x) = z(t)$, $y'(x) = -t^2 z'(t)$, $y''(x) = t^4 z''(t) + 2t^3 z'(t)$ et $y^{(3)}(x) = -t^6 z^{(3)} - 6t^5 z''(t) - 6t^4 z'(t)$. Avec $x = 1/t$ et $t \neq 0$, on en déduit que (E) s'écrit,

$$-t^6 z^{(3)} - 6t^5 z''(t) - 6t^4 z'(t) + 6t(t^4 z''(t) + 2t^3 z'(t)) + 6t^2(-t^2 z'(t)) - 8t^6 z(t) = t^6 |t|$$

soit (E').
(c) Soit l'équation homogène $(EH)'$, $z^{(3)}(t) + 8\, z(t) = 0$. Le polynôme caractéristique associé à cette équation est $X^3 + 8 = 0$, soit $X^3 = -8$ donc $X^3 = 2^3 e^{i\pi}$ soit $X = -2$, $X = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$ et $X = 2e^{-i\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}$. Comme ce sont des racines simples on en déduit que:

$$\mathcal{H} = \Big\{ t \in]-\infty, 0[\mapsto a_1 e^{-2t} + e^t \big(a_2 \cos(\sqrt{3}\, t) + a_3 \sin(\sqrt{3}\, t)\big),\ (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3 \Big\}$$
$$\bigcup \Big\{ t \in]0, \infty[\mapsto a_1 e^{-2t} + e^t \big(a_2 \cos(\sqrt{3}\, t) + a_3 \sin(\sqrt{3}\, t)\big),\ (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3 \Big\}.$$

(d) Pour $t > 0$, $\tilde{z}(t) = -t/8$ est une solution particulière, et pour $t < 0$, $\tilde{z}(t) = t/8$ est une solution particulière. Ainsi l'ensemble des solutions de (E') s'écrit:

$$\mathcal{E}' = \Big\{ t \in]-\infty, 0[\mapsto \frac{1}{8}\, t + a_1 e^{-2t} + e^t \big(a_2 \cos(\sqrt{3}\, t) + a_3 \sin(\sqrt{3}\, t)\big),\ (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3 \Big\}$$
$$\bigcup \Big\{ t \in]0, \infty[\mapsto -\frac{1}{8}\, t + a_1 e^{-2t} + e^t \big(a_2 \cos(\sqrt{3}\, t) + a_3 \sin(\sqrt{3}\, t)\big),\ (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3 \Big\}.$$

(e) Avec $x = 1/t$, on en déduit que la solution générale de (E) est:

$$\mathcal{E} = \Big\{x \in]-\infty, 0[\mapsto \frac{1}{8x} + a_1 e^{-\frac{2}{x}} + e^{\frac{1}{x}}\big(a_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{x}) + a_3\sin(\frac{\sqrt{3}}{x})\big),\ (a_1,a_2,a_3)\in\mathbf{R}^3\Big\}$$
$$\bigcup\Big\{x \in]0,\infty[\mapsto -\frac{1}{8x} + a_1 e^{-\frac{2}{x}} + +e^{\frac{1}{x}}\big(a_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{x}) + a_3\sin(\frac{\sqrt{3}}{x})\big),\ (a_1,a_2,a_3)\in\mathbf{R}^3\Big\}.$$

Chacune des solutions n'admet pas de limite en 0, on ne peut donc pas trouver une solution maximale sur $\mathbf{R}$.

□

2. **(Sur 12 + 5 points)** On considère la fonction F où

$$F(x) = \int_1^\infty \frac{t-1}{t^x\ln(t)}\,dt,$$

et on note $f(x,t) = \dfrac{t-1}{t^x\ln(t)}$ pour $(x,t)\in\mathbf{R}\times[1,\infty[$.

(a) Montrer que $\ln(t)\sim t-1$ lorsque $t\to 1$ **(0.5 pts)**. Pour $x\in\mathbf{R}$, préciser des équivalents de $f(x,t)$ quand $t\to 1$ **(0.5 pts)** et quand $t\to+\infty$ **(1 pt)**.

(b) Montrer qu'une primitive de $1/t\ln(t)$ est $\ln(\ln(t))$ pour $t>1$ **(0.5 pts)**. En déduire que $F(2)$ diverge **(0.5 pts)**.

(c) Montrer que le domaine de définition de F est $]2,\infty[$ **(2 pts)**.

(d) Soit $a>2$. Montrer que F est une fonction continue sur $[a,+\infty[$ **(2 pts)**. Sur quel domaine F est-elle en réalité continue? **(0.5 pts)**

(e) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]2,+\infty[$ **(3 pts)** et donner l'expression sous forme d'intégrale de $F'(x)$ **(0.5 pts)**. En déduire que $F'(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{1-x}$ pour tout $x>2$ **(1 pt)**.

(f) **(Question subsidiaire: 5 points)** Déterminer la limite de $F(n)$ lorsque $n\to\infty$ **(1.5 pts)**. En utilisant le signe de F', en déduire $\lim_{x\to\infty}F(x)$ **(2 pts)**. En déduire l'expression de $F(x)$ pour tout $x>2$ **(1.5 pts)**.

Proof. (a) Avec le développement limité de la fonction logarithme en 1 on en déduit que $\ln(t) = ln(1) + 1*(t-1) + o(t-1)$ car la dérivée de ln en 1 est 1, d'où l'équivalence.
On en déduit que $f(x,t)\sim 1$ quand $t\to 1^+$ quelque soit $x\in]-\infty,0[$ fixé.
On a également $f(x,t)\sim\frac{t^{1-x}}{\ln(t)}$ quand $t\to\infty$.
(b) La dérivée de $\ln(\ln(t))$ par rapport à t est bien $1/t\ln(t)$ pour $t>1$. On a pour $x=2$, $f(2,t)\sim 1/t\ln(t)$ et comme $[\ln(\ln(t))]_2^\infty=\infty$ donc $\int_2^\infty dt/t\ln(t)$ diverge, d'après le Théorème de comparaison, $F(2)$ diverge.
(c) F est intégrale impropre qui admet des problèmes de convergence en 1 et en $+\infty$. En 1, la fonction $f(x,t)$ est prolongeable par continuité, il n'y a donc pas de problème de convergence. En $+\infty$, pour $x<2$ et $t\geq 3$, $f(x,t)>\frac{1}{t}$ et comme $\int_3^\infty\frac{1}{t}dt$ diverge, on en déduit d'après le Théorème de comparaison que F diverge. En 2 on a vu que F diverge. Enfin pour $x>2$, on a pour $t\geq 3$, on a $|f(x,t)|\leq\frac{1}{t^{x-1}}$ et comme $\int_3^\infty\frac{1}{t^{x-1}}dt$ converge (intégrale de Riemann) on en déduit que F existe d'après le Théorème de comparaison. Le domaine de définition de F est bien $]2,+\infty[$.
(d) Pour tout $2<a\leq x$ et $t\geq 1$, on a $t^x\leq t^a$. On en déduit bien que pour tout $x\geq a$ et $t>1$, $0\leq f(x,t)\leq f(a,t)=\frac{(1-t)}{t^{a-1}\ln(t)}=g_0(t)$ avec $\int_1^\infty g_0(t)dt<\infty$. De plus, pour $(x,t)\in]2,\infty[\times]1,\infty[$ la fonction $(x,t)\to f(x,t)$ est continue (comme somme, produit et quotient de fonctions continues). Donc d'après le Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, F est continue sur $[a,\infty[$.
Comme ceci est vrai pour tout $a>2$, on en déduit que F est continue sur $]2,\infty[$.
(e) Pour $(x,t)\in]2,+\infty[\times]1,\infty[$ la fonction $(x,t)\to f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (comme somme, produit et quotient de classe $\mathcal{C}^1$). De plus $\frac{\partial}{\partial x}f(x,t) = -(t^{1-x}-t^{-x})$. Donc pour tout $(x,t)\in]2,+\infty[\times]1,\infty[$, $\left|\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right|\leq t^{1-a}$ (car $t^{-x}\leq t^{1-x}\leq t^{1-a}$). On en déduit que pour tout $x\geq a$, $\left|\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right|\leq g_1(t)=t^{1-a}$, avec $\int_1^\infty g_1(t)dt<\infty$. Donc d'après le Théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\infty[$. Comme ceci est vrai pour tout $a>2$, on en déduit que F est classe $\mathcal{C}^1$ sur $]2,+\infty[$.
De plus, $F'(x)=\int_1^\infty(t^{-x}-t^{1-x})\,dt$ pour $x>2$.
On peut calculer cette intégrale et on obtient que $F'(x)=\left[\frac{1}{1-x}t^{1-x}-\frac{1}{2-x}t^{2-x}\right]_1^\infty=\frac{1}{2-x}-\frac{1}{1-x}$ pour $x>2$.
(f) On considère la suite $(F(n))_{n\geq 3}$. C'est une suite d'intégrales et on peut appliquer le Théorème de convergence

dominée de Lebesgue puisque $f(n,t) \to 0$ pour tout $t > 1$ et $|f(n,t)| \leq f(3,t)$ avec $F(3) = \int_1^\infty f(3,t)dt < \infty$. Donc $F(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par ailleurs, $F'(x) < 0$ pour tout $x > 2$, donc F est décroissante et ainsi pour tout $x \in R$, $F([x]) \geq F(x) \geq F([x]+1)$ (avec $[x]$ la partie entière de x). Donc $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.
On sait que $F'(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{1-x}$ pour $x > 2$, donc une primitive quelconque de F' est $\ln(x-1) - \ln(x-2) + C$ avec $C \in \mathbf{R}$. Comme la limite d'une telle fonction quand $x \to \infty$ est C, et comme $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$, on en déduit que $C = 0$ et $F(x) = \ln(x-1) - \ln(x-2)$ pour tout $x > 2$.

$\square$