Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2012 – 2013

Analyse S4

Contrôle continu n°2, mars 2013

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(18 points)** On définit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt.$

   (a) Déterminer l'ensemble de définition D de F.

   (b) Montrer que F est paire, puis que $F(0) = 0$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = 1/t$).

   (c) Montrer que pour $x > 0$ et $t \in \mathbf{R}$, $\ln(x^2 + t^2) = 2\ln x + \ln(1 + t^2/x^2)$. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to \infty$.

   (d) Montrer que F est continue sur D.

   (e) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout ensemble $[a, b]$ où $0 < a < b < \infty$, puis en déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$. Donner F' sous forme d'une intégrale.

   (f) Calculer explicitement $F'(x)$ à l'aide d'une décomposition de fraction en éléments simples (on ne traitera pas les cas $x = 0$ et $x = \pm 1$). En déduire, en justifiant, que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = \pi\,\ln(1 + |x|)$.

2. **(8 points)** On considère l'équation différentielle:

$$(E) \qquad (x^2 - x)y'(x) - (x-2)y(x) = x^4 e^x.$$

   (a) Déterminer le ou les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales.

   (b) Déterminer les solutions de l'équation homogène (EH) associée à (E) (on pourra chercher une décomposition de fraction en éléments simples). En déduire que les solutions maximales de (EH) sont définies sur 2 intervalles.

   (c) Déterminer les solutions maximales de (E).

   (d) Est-il possible de déterminer une solution maximale sur $\mathbf{R}$? Laquelle?

   (e) Existe-t-il une solution maximale telle que $y(0) = 1$?