Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2012 – 2013

Analyse S4

Contrôle continu n°2, mars 2013

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(19 points)** On définit $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt.$

   (a) Déterminer l'ensemble de définition D de F.

   (b) Montrer que F est paire, puis que $F(0) = 0$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = 1/t$).

   (c) Montrer que pour $x > 0$ et $t \in \mathbf{R}$, $\ln(x^2+t^2) = 2\ln x + \ln(1 + t^2/x^2)$. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to \infty$.

   (d) Montrer que F est continue sur D.

   (e) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout ensemble $[a,b]$ où $0 < a < b < \infty$. Finalement, sur quel ensemble F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? Donner F' sous forme d'une intégrale.

   (f) Calculer explicitement $F'(x)$ à l'aide d'une décomposition de fraction en éléments simples (on ne traitera pas les cas $x = 0$ et $x = \pm 1$). En déduire, en justifiant, que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = \pi\,\ln(1 + |x|)$.

Proof. (a) La fonction $f(x,t) = \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donc, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f(x,t)$ est localement intégrable sur $[0,\infty[$. Si $x \neq 0$, le seul problème de convergence est en $+\infty$. Or pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lim_{t\to\infty} t^{3/2} f(x,t) = 0$ donc d'après le Théorème de Comparaison, $F(x)$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}^*$.
Si $x = 0$, il y a un problème de convergence en $t = 0$. Mais $f(x,t) \sim 2\ln x$ quand $t \to 0$ et $\int_0^1 \ln t\,dt$ converge, donc d'après le Théorème de Comparaison $F(0)$ existe. Au final, F converge sur $\mathbf{R}$ **(3 pts)**.
(b) On a clairement $F(-x) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ **(0.5 pts)**.
Avec le changement de variable $u = 1/X$ qui est admissible sur $]0,\infty[$ (car bijection de classe $\mathcal{C}^1$), on a $dt = -1/u^2 du$, d'où $F(0) = \int_0^\infty \frac{\ln(t^2)}{1+t^2}\,dt = -\int_\infty^0 \frac{\ln(1/u^2))}{u^2(1+1/u^2)}\,du = -F(0)$, d'où $F(0) = 0$ **(1.5 pts)**.
(c) $\ln(x^2+t^2) = \ln(x^2(1/t^2/x^2)) = 2\ln x + \ln(1+t^2/x^2)$ **(0.5 pts)**.
Pour $x > 0$, on a $F(x) = 2\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1+t^2}dt + \int_0^\infty \frac{\ln(1+t^2/x^2)}{1+t^2}\,dt = \pi\ln(x) + \int_0^\infty \frac{\ln(1+t^2/x^2)}{1+t^2}\,dt$. Or pour $n \in \mathbf{N}^*$, la suite de fonctions $g_n(t) = \frac{\ln(1+t^2/n^2)}{1+t^2}$ est décroissante (en n), tendant vers la fonction nulle pour tout $t \geq 0$. D'après le Théorème de convergence monotone, on en déduit que $\int_0^\infty g_n(t)dt$ converge vers 0 quand $n \to \infty$. De plus comme la fonction $x \mapsto \int_0^\infty \frac{\ln(1+t^2/x^2)}{1+t^2}\,dt$ est clairement décroissante, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. Ainsi $F(x) \sim \pi\,\ln(x)$ pour $x \to \infty$ **(2.5 pts)**.
(d) La fonction $f(x,t)$ est continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et pour tout $a > 0$, pour tout $x \in [-a,a]$, $|f(x,t)| \leq |f(a,t)| + |f(0,t)|$ pour tout $t > 0$ et $\int_0^\infty |f(a,t)|dt < \infty$, $\int_0^\infty |f(0,t)|dt < \infty$ donc $\int_0^\infty |f(a,t)| + |f(0,t)|dt < \infty$. On en déduit d'après le Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre que F est continue sur $[-a,a]$ pour tout $a > 0$, donc F est continue sur $\mathbf{R}$ **(2.5 pts)**.
(e) La fonction $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbf{R}^2$. De plus, pour tout $0 < a < b$, $\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| \leq \frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)} = g_1(t)$ et $\int_0^\infty g_1(t)dt < \infty$. On avait également $f(x,t) \leq f(a,t)$ pour tout $t \geq 0$ et $\int_0^\infty f(a,t)dt < \infty$. D'après le Théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre on en déduit que F est classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ **(2.5 pts)**.
Comme cette propriété est vraie pour tout $0 < a < b$, elle est donc vraie sur $]0,\infty[$. De plus la fonction F est paire, donc F est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$ **(1 pt)**.

On en déduit que pour $x \in \mathbf{R}^*$, $F'(x) = 2x \int_0^\infty \frac{dt}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ **(0.5 pts)**.
(f) Pour $x \in]0,1[\cup]1,\infty[$, on a $F'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\left(\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^\infty \frac{dt}{x^2+t^2}\right) = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right) = \frac{\pi}{x+1}$. Comme F' est impaire (car F est paire), on en déduit que pour $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0[$, $F'(x) = \frac{\pi}{x-1}$ **(2.5 pts)**.
De ceci, on en déduit que pour $x \in]0,1[\cup]1,\infty[$, $F(x) = \pi \ln(1+x) + C$, où $C \in \mathbf{R}$. Comme F est continue sur $\mathbf{R}$, cette formule est aussi vraie sur $[0,\infty[$. Mais comme $F(0) = 0$ on en déduit que $C = 0$, d'où $F(x) = \pi \ln(1+x)$ pour $x \geq 0$. Comme F est paire, on en déduit la formule finale **(2 pts)**.

$\square$

2. **(8 points)** On considère l'équation différentielle:

$$(E) \qquad (x^2 - x)y'(x) - (x-2)y(x) = x^4 e^x.$$

(a) Déterminer le ou les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales.

(b) Déterminer les solutions de l'équation homogène (EH) associée à (E) (on pourra chercher une décomposition de fraction en éléments simples). En déduire que les solutions maximales de (EH) sont définies sur 2 intervalles.

(c) En utilisant la méthode de variation de la constante déterminer les solutions maximales de (E).

(d) Est-il possible de déterminer une solution maximale sur $\mathbf{R}$? Laquelle?

(e) Existe-t-il une solution maximale telle que $y(0) = 1$?

Proof. (a) On peut encore écrire (E) sous la forme $y'(x) - \frac{x-2}{x^2-x}y(x) = \frac{x^4}{x^2-x}e^x$. Comme les fonctions $x \mapsto \frac{x-2}{x^2-x}$ et $x \mapsto \frac{x^4}{x^2-x}e^x$ sont continues sur $]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,\infty[$, on cherchera des solutions maximales sur les intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,\infty[$ **(1 pt)**.
(b) Soit (EH) $\quad y'(x) - \frac{x-2}{x^2-x}y(x) = 0$. Il convient de chercher une primitive de $\frac{x-2}{x^2-x}$. Mais $\frac{x-2}{x^2-x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$. On trouve par identification $a = 2$ et $b = -1$. Aussi une primitive de $\frac{x-2}{x^2-x}$ est $\ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$. Les solutions de (EH) s'écrivent donc sous la forme $x \mapsto C\,\frac{x^2}{x-1}$, $C \in \mathbf{R}$ **(1.5 pts)**.
On s'aperçoit ainsi que les solutions maximales peuvent être prolongées par continuité et continuité de la dérivée de $]-\infty,0[$ et $]0,1[$ à $]-\infty,1[$. On trouve ainsi que l'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions maximales de (EH) est:

$$\mathcal{H} = \left\{x \in]-\infty,1[,\ y(x) = C\,\frac{x^2}{x-1},\ C \in \mathbf{R}\right\} \bigcup \left\{x \in]1,+\infty[,\ y(x) = C\,\frac{x^2}{x-1},\ C \in \mathbf{R}\right\} \qquad \textbf{(1.5 pts)}.$$

(c) On pose $y(x) = \lambda(x)\,\frac{x^2}{x-1}$ et on résoud (E) ce qui donne $\lambda'(x) = xe^x$. On montre alors facilement (IPP par exemple) que $\lambda(x) = (x-1)e^x$ est une primitive et ainsi $\mathcal{E}$ ensemble des solutions maximales est tel que:

$$\mathcal{E} = \left\{x \in]-\infty,1[,\ y(x) = C\,\frac{x^2}{x-1} + x^2e^x,\ C \in \mathbf{R}\right\} \bigcup \left\{x \in]1,+\infty[,\ y(x) = C\,\frac{x^2}{x-1} + x^2e^x,\ C \in \mathbf{R}\right\} \qquad \textbf{(2 pts)}.$$

(d) On trouve une solution maximale sur $\mathbf{R}$ si et seulement si $C = 0$ et cette solution est $y(x) = x^2e^x$ **(1 pt)**.
(e) Si $y(0) = 1$, alors il n'y a pas de solution à (E) **(1 pt)**.

$\square$