Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2013 – 2014

Analyse S4

Contrôle continu n°2, mars 2014

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(17 points)** Pour $f\ :\ [0\infty[\mapsto \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0,\infty[$, on définit, si elle existe, la fonction $\widehat{f}$ appelée transformée de Laplace de f et telle que:

$$\widehat{f}(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

   (a) Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer l'ensemble de définition de $\widehat{f_i}$ et calculer explicitement $\widehat{f_i}$, où $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = 1$ et $f_3(t) = e^{t^2}$.

   (b) On suppose désormais qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\sup_{t\in[0,\infty[} |e^{-\alpha t} f(t)| < \infty$. Montrer que $\widehat{f}$ est définie sur $]\alpha, \infty[$.

   (c) Montrer que $\widehat{f}$ est continue sur $]\alpha, \infty[$.

   (d) Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha, \infty[$ et préciser $(\widehat{f})'$. Lorsque f est positive, la fonction $\widehat{f}$ est-elle monotone?

   (e) Pour n entier plus grand que α, montrer que $n\widehat{f}(n) = \int_1^\infty nf(t)e^{-nt}dt + \int_0^n f(t/n)e^{-t}dt$ (on pourra utiliser un changement de variable). Majorer la première intégrale de cette somme et en déduire qu'elle tend vers 0 quand $n \to \infty$. En utilisant le Théorème de Lebesgue, déterminer la limite de la seconde intégrale et en déduire que $\lim_{n\to\infty} n\widehat{f}(n) = f(0)$.

2. **(9 points)** On considère l'équation différentielle:

$$(E) \qquad (x^2 - 1)y'(x) + xy(x) = x^3(x^2 - 1).$$

   (a) Déterminer le ou les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales.

   (b) Déterminer les solutions de l'équation homogène (EH) associée à (E). En déduire que les solutions maximales de (EH) sont définies sur 3 intervalles.

   (c) Déterminer les solutions maximales de (E).

   (d) Est-il possible de déterminer des solutions maximales sur $\mathbf{R}$? Lesquelles?

   (e) Déterminer les solutions maximales telles que $y(0) = 1$.