Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2013 – 2014

Analyse S4

Correction du contrôle continu n°2, mars 2014

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(17 points)** Pour $f\ :\ [0\infty[\mapsto \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0,\infty[$, on définit, si elle existe, la fonction $\widehat{f}$ appelée transformée de Laplace de f et telle que:

$$\widehat{f}(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

   (a) Pour $i=1,2,3$, déterminer l'ensemble de définition de $\widehat{f_i}$ et calculer explicitement $\widehat{f_i}$, où $f_1(t)=e^t$, $f_2(t)=1$ et $f_3(t)=e^{t^2}$.

   (b) On suppose désormais qu'il existe $\alpha\in\mathbf{R}$ tel que $\sup_{t\in[0,\infty[}|e^{-\alpha t}f(t)|<\infty$. Montrer que $\widehat{f}$ est définie sur $]\alpha,\infty[$.

   (c) Montrer que $\widehat{f}$ est continue sur $]\alpha,\infty[$.

   (d) Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha,\infty[$ et préciser $(\widehat{f})'$. Lorsque f est positive, la fonction $\widehat{f}$ est-elle monotone?

   (e) Pour n entier plus grand que α, montrer que $n\widehat{f}(n)=\int_1^{\infty} nf(t)e^{-nt}dt+\int_0^n f(t/n)e^{-t}dt$ (on pourra utiliser un changement de variable). Majorer la première intégrale de cette somme et en déduire qu'elle tend vers 0 quand $n\to\infty$. En utilisant le Théorème de Lebesgue, déterminer la limite de la seconde intégrale et en déduire que $\lim_{n\to\infty} n\widehat{f}(n)=f(0)$.

Proof. (a) Pour les 3 f_i, il y a un problème de convergence uniquement en ∞.
On a $\widehat{f_1}(p)=\int_0^{\infty} e^{(1-p)t}dt$, qui existe si $p>1$. Alors $\widehat{f_1}(p)=(p-1)^{-1}$ **(1pt)**.
On a $\widehat{f_2}(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}dt$, qui existe si $p>0$. Alors $\widehat{f_2}(p)=p^{-1}$ **(1pt)**.
On a $\widehat{f_3}(p)=\int_0^{\infty} e^{t^2-pt}dt$, qui n'existe jamais **(1pt)**.

(b) Soit $p>\alpha$. Alors $\widehat{f}(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\le\int_0^{\infty}|e^{-\alpha t}f(t)|e^{(\alpha-p)t}dt\le\sup_{t\in[0,\infty[}|e^{-\alpha t}f(t)|\int_0^{\infty}e^{(\alpha-p)t}dt$. Or $\int_0^{\infty}e^{(\alpha-p)t}dt$ existe si $p>\alpha$, donc $\widehat{f}$ est définie sur $]\alpha,\infty[$ **(1.5pts)**.

(c) Soit $\beta>\alpha$. Montrons que $\widehat{f}$ est continue sur $[\beta,\infty[$. Il est clair que $\widehat{f}$ existe sur $[\beta,\infty[$ d'après la question précédente. On a également $(t,p)\in[0,\infty[\times\mathbf{R}\mapsto f(t)e^{-pt}$ qui est une fonction continue. De plus $|f(t)e^{-pt}|\le|e^{-\beta t}f(t)|e^{(\beta-p)t}\le\sup_{t\in[0,\infty[}|e^{-\alpha t}f(t)|e^{(\beta-p)t}$. Comme $\int_0^{\infty}e^{(\beta-p)t}dt<\infty$, on en déduit que f est continue sur $[\beta,\infty[$, donc sur $]\alpha,\infty[$ **(2.5pts)**.

(d) On se place également sur $[\beta,\infty[$ avec $^{\beta}>\alpha$. Alors $\frac{\partial}{\partial p}f(t)e^{-pt}=-tf(t)e^{-pt}$, qui existe sur $\mathbf{R}^2$. Donc il suffit de montrer la domination. Mais $\left|\frac{\partial}{\partial p}f(t)e^{-pt}\right|\le\sup_{t\ge0}|f(t)e^{-\alpha t}|\times te^{-(\beta-\alpha)t}$ pour tout $t\ge0$ et tout $p\in[\beta,\infty[$. De plus $\int_0^{\infty}te^{-(\beta-\alpha)t}dt<\infty$ (car $\lim_{t\to\infty}t^2(te^{-(\beta-\alpha)t})=0$) donc $\widehat{f}$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\beta,\infty[$ pour tout $\beta>\alpha$, soit $\widehat{f}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha,\infty[$ **(2.5pts)**.
On obtient ainsi que $(\widehat{f})'(p)=-\int_0^{\infty}tf(t)e^{-pt}dt$ **(0.5pts)**.
Si $f\ge0$, il est clair que $(\widehat{f})'(p)\le0$, donc f est décroissante **(0.5pts)**.

(e) Pour $n > \alpha$, $n\widehat{f}(n) = \int_1^\infty nf(t)e^{-nt}dt + \int_0^1 nf(t)e^{-nt}dt = \int_1^\infty nf(t)e^{-nt}dt + \int_0^n f(t/n)e^{-t}dt$ avec le changement de variable $t' = nt$ **(1pt)**.
On a $\left|\int_1^\infty nf(t)e^{-nt}dt\right| \leq \sup_{t\geq 0}|f(t)e^{-\alpha t}| \times \int_1^\infty ne^{-(n-\alpha)t}dt \leq \sup_{t\geq 0}|f(t)e^{-\alpha t}| \times \frac{n}{n-\alpha}e^{-(n-\alpha)}$. Comme $e^{-(n-\alpha)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a bien $\int_1^\infty nf(t)e^{-nt}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **(2pts)**.
On va montrer que la seconde intégrale converge grâce au théorème de convergence dominée. En effet, on a $\int_0^n f(t/n)e^{-t}dt = \int_0^\infty h_n(t)$ avec $h_n(t) = \mathbf{1}_{t\in[0,n]}f(t/n)e^{-t}$. Pour tout $t \geq 0$, on a $h_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} h(t) = \mathbf{1}_{t\geq 0}f(0)e^{-t}$. De plus pour tout $n > \alpha$ et tout $t \geq 0$, on a $|h_n(t)| \leq \sup_{u\in[0,1]}|f(u)|\times e^{-t}$ et $\int_0^\infty \sup_{u\in[0,1]}|f(u)|\times e^{-t}dt < \infty$. Donc d'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^\infty h_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty h_n(t)dt = \int_0^\infty f(0)e^{-t}dt = f(0)$ **(3pts)**.
On en déduit ainsi que $\lim_{n\to\infty} n\widehat{f}(n) = \lim_{n\to\infty}\int_1^\infty nf(t)e^{-nt}dt + \int_0^\infty h_n(t)dt = 0 + f(0) = f(0)$ **(0.5pts)**.

□

2. **(9 points)** On considère l'équation différentielle:

$$(E) \qquad (x^2-1)y'(x) + xy(x) = x^3(x^2-1).$$

(a) Déterminer le ou les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales.

(b) Déterminer les solutions de l'équation homogène (EH) associée à (E). En déduire que les solutions maximales de (EH) sont définies sur 3 intervalles.

(c) Déterminer les solutions maximales de (E).

(d) Est-il possible de déterminer des solutions maximales sur $\mathbf{R}$? Lesquelles?

(e) Déterminer les solutions maximales telles que $y(0) = 1$.

Proof. (a) On peut chercher des solutions sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,\infty[$ (de telle manière que la fonction $(x^2-1)^{-1}$ soit continue) **(1pt)**.

(b) L'équation homogène est $y'(x) + x(x^2-1)^{-1}y(x) = 0$. Comme une primitive de $x \mapsto x(x^2-1)^{-1}$ est $\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$ si $|x| > 1$ et $-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ si $|x| < 1$, on en déduit que **(2pts)**

$$\mathcal{E}_H = \{x\in]-\infty,-1[\mapsto \frac{C}{\sqrt{x^2-1}},\ C\in\mathbf{R}\}\cup\{x\in]1,\infty[\mapsto \frac{C}{\sqrt{x^2-1}},\ C\in\mathbf{R}\}\cup\{x\in]-1,1[\mapsto \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},\ C\in\mathbf{R}\}$$

(c) On cherche une solution particulière avec la méthode de variation de la constante. Pour $|x| > 1$, on pose donc $y_0(x) = \frac{C(x)}{\sqrt{x^2-1}}$, et on obtient que $C'(x)(x^2-1)^{-1/2} = x^3$. On en déduit donc que $C'(x) = x^3(x^2-1)^{1/2}$, d'où $C(x) = \int^x t(t^2-1)^{3/2}dt + \int^x t(t^2-1)^{1/2}dt = \frac{1}{5}(x^2-1)^{5/2} + \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}$. Ainsi une solution particulière est $y_0(x) = \frac{1}{5}(x^2-1)^2 + \frac{1}{3}(x^2-1)$.
Pour $|x| < 1$, on a également $y_0(x)$. On obtient ainsi que **(3pts)**:

$$\mathcal{E} = \left\{x\in]-\infty,-1[\mapsto \frac{1}{15}(x^2-1)(3x^2+2)+\frac{C}{\sqrt{x^2-1}},\ C\in\mathbf{R}\right\}\cup\left\{x\in]1,\infty[\mapsto \frac{1}{15}(x^2-1)(3x^2+2)+\frac{C}{\sqrt{x^2-1}},\ C\in\mathbf{R}\right\}$$
$$\cup\left\{x\in]-1,1[\mapsto \frac{1}{15}(x^2-1)(3x^2+2)+\frac{C}{\sqrt{1-x^2}},\ C\in\mathbf{R}\right\}.$$

(d) Pour obtenir une solution maximale sur $\mathbf{R}$, il faut que celle-ci existe en 1 et -1, ce qui implique que $C = 0$ dans les 3 intervalles. La fonction $x\in\mathbf{R}\mapsto \frac{1}{15}(x^2-1)(3x^2+2)$ est une fonction polynomiale, elle est donc continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Ainsi, cette fonction est bien l'unique solution maximale sur $\mathbf{R}$ **(1.5pts)**.

(e) Si $y(0) = 1$, alors $1 = -\frac{2}{15} + C$, soit $C = \frac{17}{15}$. Il existe donc une unique solution maximale telle que $y(0) = 1$, qui est définie sur $]-1,1[$, qui est $x\in]-1,1[\mapsto\mapsto \frac{1}{15}\left((x^2-1)(3x^2+2)+\frac{17}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ **(1.5pts)**.

□