Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2014 − 2015

Analyse S4

Contrôle continu n°2, avril 2015

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(22 points)** Soit l'intégrale
$$F(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,dt.$$
   (a) Montrer que $F(x)$ n'est pas définie pour $|x| > 1$ **(1pt)**, puis qu'elle est définie sur $]-1,1[$ **(1.5pts)** et enfin en 1 **(2pts)** et en -1 **(1.5pts)**.

   (b) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $F(x) = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,dt$ **(1pt)**.

   (c) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $F(x) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x\cos t)-\ln(1-x\cos t)}{\cos t}\,dt$ **(1pt)**. La fonction F est-elle paire ou impaire **(0.5pts)**?

   (d) Montrer que pour tout $-1 < u < 1$, on a $\left|\dfrac{\ln(1+u)}{u}\right| \leq \dfrac{1}{1-|u|}$ **(1.5pts)**. En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, $|f(x,t)| \leq \frac{|x|}{1-|x|}$ **(1.5pts)**, puis que F est continue sur $]-1,1[$ **(2pts)**.

   (e) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ **(2.5pts)** et préciser F' **(0.5pts)**.

   (f) Montrer que pour $t \in [0,\pi]$, $\cos t = \frac{1-\tan^2(t/2)}{1+\tan^2(t/2)}$ **(1pt)**. En utilisant le changement de variable $u = \tan(t/2)$ montrer que $F'(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}$ **(3pts)**.

   (g) Déterminer $F(0)$ **(0.5pts)**. En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x \in]-1,1[$ **(1pt)**.

2. **(10 points)** On considère l'équation différentielle:
$$(E) \qquad \ln(x)\,y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 1.$$
   (a) Déterminer le ou les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales de E **(1pt)**.

   (b) Déterminer la dérivée de la fonction $x \to \ln(\ln(x))$ **(0.5pts)** en précisant le domaine de dérivation **(0.5pts)**. En déduire les solutions maximales de l'équation homogène (EH) associée à (E) **(2pts)**.

   (c) Déterminer les solutions maximales de (E) **(2pts)**.

   (d) Soit la fonction $g(x) = \frac{x}{\ln(x+1)}$ pour $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$ et $g(0) = 1$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ **(2.5pts)**.

   (e) En déduire une solution de (E) sur $]0,\infty[$ **(1.5pts)**.