*Université Paris I, Panthéon - Sorbonne*

**Licence M.A.S.S. deuxième année** 2014 – 2015

# Analyse S4

Contrôle continu n°2, avril 2015

*Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.*

1. **(22 points)** Soit l'intégrale
$$F(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\, dt.$$
   (a) Montrer que $F(x)$ n'est pas définie pour $|x| > 1$ **(1pt)**, puis qu'elle est définie sur $]-1,1[$ **(1.5pts)** et enfin en 1 **(2pts)** et en $-1$ **(1.5pts)**.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $F(x) = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\, dt$ **(1pt)**.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $F(x) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x\cos t) - \ln(1-x\cos t)}{\cos t}\, dt$ **(1pt)**. La fonction $F$ est-elle paire ou impaire **(0.5pts)**?
   (d) Montrer que pour tout $-1 < u < 1$, on a $\left|\dfrac{\ln(1+u)}{u}\right| \leq \dfrac{1}{1-|u|}$ **(1.5pts)**. En déduire que pour tout $x \in ]-1,1[$, $|f(x,t)| \leq \frac{|x|}{1-|x|}$ **(1.5pts)**, puis que $F$ est continue sur $]-1,1[$ **(2pts)**.
   (e) Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ **(2.5pts)** et préciser $F'$ **(0.5pts)**.
   (f) Montrer que pour $t \in [0,\pi]$, $\cos t = \frac{1-\tan^2(t/2)}{1+\tan^2(t/2)}$ **(1pt)**. En utilisant le changement de variable $u = \tan(t/2)$ montrer que $F'(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}$ **(3pts)**.
   (g) Déterminer $F(0)$ **(0.5pts)**. En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x \in ]-1,1[$ **(1pt)**.

*Proof.* (a) Pour $x > 1$ et $t$ dans un intervalle ouvert contenant $\pi$, ou pour $x < -1$ et dans un intervalle ouvert contenant 0, alors $(1 + x\cos t) < 0$, le logarithme d'un nombre négatif n'étant pas défini, on en déduit que $f(x,t) = \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}$ n'est pas définie sur ces intervalles, donc $F$ n'existe pas.
Pour $x \in ]-1,1[$, $t \to f(x,t)$ est continue sur $[0,2\pi]$ sauf pour $\cos(t) = 0$, donc en $\pi/2$ et $3\pi/2$. Mais comme $\ln(1+u) \sim u$ pour $u \to 0$, on en déduit que $t \to f(x,t)$ est prolongeable par continuité en $\pi/2$ et $3\pi/2$ (sa limite étant $x$), donc $F$ est définie.
Pour $x = 1$, on a le même problème en $\pi/2$ et $3\pi/2$, qui se résout également par prolongement par continuité. On a aussi un problème lorsque $1 + \cos t = 0$, c'est-à-dire lorsque $t = \pi$ car alors le logarithme tend vers $-\infty$. Mais en $\pi$, un développement limité de la fonction cosinus donne $\cos t \sim -1 + (t-\pi)^2/2$, soit $\ln(1+\cos t) \sim 2\ln|t-\pi|$ et ainsi $f(1,t) \sim 2\ln|t-\pi|$. Or $\int_0^{2\pi} \ln|t-\pi|\, dt$ existe car avec un changement de variable cela revient à $\int_0^{\pi} \ln s\, ds$ qui existe car une primitive de $\ln s$ est $s(\ln s - 1)$ qui tend vers 0 en 0. Donc par le théorème de comparaison des intégrales absolument convergente, $F(1)$ existe.
Pour $x = -1$, comme précédemment on a un problème lorsque $1 - \cos t = 0$, donc lorsque $t = 0$ ou $t = 2\pi$ (par périodicité de la fonction $\cos t$, le résultat ne pourra qu'être le même). En $t = 0$, $1 - \cos t \sim t^2/2$ et comme précédemment on a donc $f(-1,t) \sim 2\ln t$ et comme précédemment, on utilise le fait que $\int_0^{\pi} \ln t\, dt$ converge. On obtient ainsi que $F(-1)$ existe.

(b) Pour $x \in [-1,1]$, $F(x) = \int_0^{\pi} f(x,t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(x,t)dt$. Dans cette seconde intégrale, on peut utiliser le changement de variable $u = 2\pi - t$. Comme $\cos(2\pi - u) = \cos(u)$, on en déduit que $\int_{\pi}^{2\pi} f(x,t)dt = -\int_{\pi}^{0} f(x,u)du = \int_0^{\pi} f(x,t)dt$, d'où le résultat.

(c) On écrit que $\int_0^\pi f(x,t)dt = \int_0^{\pi/2} f(x,t)dt + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x,t)dt$ et on utilise le changement de variable $t' = \pi - t$ dans la deuxième intégrale, puis le fait que $\cos(\pi - t') = -\cos(t')$.
On voit alors que $F(-x) = -F(x)$ donc $F$ est impaire.

(d) On utilise l'Inégalité des Accroissements Finis pour la fonction $y \to \ln(1+y)$ en $u$ et en 0, d'où $\left|\dfrac{\ln(1+u)}{u}\right| \leq \sup_{y\in[0,u]} \left|\dfrac{1}{1+y}\right|$ et comme la fonction $y \to 1/(1+y)$ est décroissante, celle-ci est maximum en $-|u|$ d'où le résultat.
On utilise cette inégalité pour $u = x\cos t$, qui appartient bien à $]-1,1[$ lorsque $x \in ]-1,1[$. On en déduit alors que $\left|\dfrac{\ln(1+x\cos t)}{x\cos t}\right| \leq \dfrac{1}{1-|x\cos t|}$ et comme $|\cos t| \leq 1$, on obtient le résultat.
Pour tout $a \in [0,1[$, et tout $x \in [-a,a]$, on a donc $|f(x,t)| \leq a/(1-a)$ pour tout $t \in [0,\pi]$. On a donc bien la domination de la fonction $f$. De plus comme celle-ci est continue en $x$, on en déduit d'après le Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre que $F$ est continue sutr $[-a,a]$ et comme ceci est vrai pour tout $a \in [0,1[$, on en conclut que $F$ est continue sur $]-1,1[$.

(e) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+x\cos t}$ qui est continue sur $]-1,1[\times[0,\pi]$. Donc pour tout $x \in [-a,a]$ avec $0 < a < 1$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{1-a}$ et $\int_0^\pi \frac{1}{1-a}\,dt < \infty$. Comme en plus $f$ est dominée pour $x \in [-a,a]$ (voir la continuité), on en déduit d'après le Théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$ pour tout $0 < a < 1$, donc $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

(f) Il est clair que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\frac{1-\tan^2(t/2)}{1+\tan^2(t/2)} = \frac{\cos^2(t/2)-\sin^2(t/2)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} = \cos(2*t/2) = \cos(t)$.
On a donc $F'(x) = 2\int_0^\pi \frac{1+\tan^2(t/2)}{1+x+(1-x)\tan^2(t/2)}dt$. Avec le changement de variable $u = \tan(t/2)$, on a $du = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\tan^2(t/2)}dt = \frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2}dt$ et ainsi $F'(x) = 4\int_0^\infty \frac{1}{1+x+(1-x)u^2}du = \frac{4}{1+x}\int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}u^2}du$. En posant $v = u\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, on obtient $F'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^\infty \frac{1}{1+v^2}dv = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}$.

(g) Il est clair que $F(0) = 0$.
Comme $F$ est une primitive de $F'$ s'annulant en 0, il convient de trouver une primitive de $\frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}$ qui est $2\pi\arcsin(x) + C$, et avec $F(0) = 0$ on en déduit que $F(x) = 2\pi\arcsin(x)$ pour tout $x \in ]-1,1[$.

□

2. **(10 points)** On considère l'équation différentielle:

$$(E) \qquad \ln(x)\, y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 1.$$

(a) Déterminer le ou les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales **(1pt)**.
(b) Déterminer la dérivée de la fonction $x \to \ln(\ln(x))$ **(0.5pts)** en précisant le domaine de dérivation **(0.5pts)**. En déduire les solutions maximales de l'équation homogène $(EH)$ associée à $(E)$ **(2pts)**.
(c) Déterminer les solutions maximales de $(E)$ **(2pts)**.
(d) Soit la fonction $g(x) = \frac{x}{\ln(x+1)}$ pour $x \in ]-1,0[\cup]0,+\infty[$ et $g(0) = 1$. Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ **(2.5pts)**.
(e) En déduire une solution de $(E)$ sur $]0,\infty[$ **(1.5pts)**.

*Proof.* (a) L'équation $(E)$ s'écrit encore $y'(x) + (x\ln x)^{-1}y(x) = (\ln x)^{-1}$ et les fonctions sont donc continues sur $]0,1[$ et $]1,\infty[$ qui sont les intervalles sur lesquelles chercher des solutions maximales à $(E)$.

(b) On a $\frac{\partial}{\partial x}\ln(\ln(x)) = (x\ln x)^{-1}$ pour $x > 1$.
Trouver une solution de $(EH)$ revient à déterminer une primitive de $(x\ln x)^{-1}$, ce qui est fait ci-dessus. Ainsi une solution de $(EH)$ s'écrira $y(x) = C\,\exp(-\ln(\ln x)) = C\,(\ln x)^{-1}$ pour $x > 1$. Pour $x \in ]0,1[$, une solution sera $y(x) = C\,\exp(-\ln|\ln x|) = C'\,(\ln x)^{-1}$. Par suite les solutions maximales de $(EH)$ s'écrivent $x \in ]0,1[\mapsto C\,(\ln x)^{-1}$ et $x \in ]1,\infty[\mapsto C\,(\ln x)^{-1}$ avec $C \in \mathbf{R}$.

(c) Pour trouver une solution particulière de $(E)$ on utilise la méthode de variation de la constante: $y_0(x) = C(x)\,(\ln x)^{-1}$ ce qui entraîne $C'(x)\,(\ln x)^{-1} = (\ln x)^{-1}$ et donc $C'(x) = 1$ soit $C(x) = x$ (à une constante près). On en déduit que l'ensemble des solutions maximales de $(E)$ s'écrivent: $x \in ]0,1[\mapsto (x+C)(\ln x)^{-1}$ et $x \in ]1,\infty[\mapsto (x+C)(\ln x)^{-1}$ avec $C \in \mathbf{R}$.

(d) On sait que $\ln(1+x) \sim x$ pour $x \to 0$, donc $g(x) \sim xx^{-1} \to 1$ pour $x \to 0$: $g$ est donc prolongeable par continuité en 0.
Il faut montrer que $g$ est également dérivable en 0. Pour cela on considère le taux de variations en 0, soit $\frac{g(x)-1}{x} = \frac{x-\ln(x+1)}{x^2}$. Mais en utilisant un DL d'ordre 2, on a $\ln(x+1) = x - x^2/2 + o(x^2)$ quand $x \to 0$, soit $\frac{x-\ln(x+1)}{x^2} \sim \frac{x^2/2}{x^2} \to 1/2$ pour $x \to 0$. Donc $g$ est bien dérivable en 0. On sait de plus que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Par prolongement par continuité on en déduit que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, \infty[$.

(e) On déduit de la question précédente par une translation ($x \to x-1$) que la fonction $(x-1)(\ln x)^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$. On en déduit qu'il existe une solution maximale unique de $(E)$ sur $]0, \infty[$ qui est $(x-1)(\ln x)^{-1}$.

□