Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2010 – 2011

Analyse S4

Examen de rattrapage, juin 2011

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(7 pts)** Soit l'équation différentielle: $(E) \quad 4x\,y''(x) + (2 - 8\sqrt{x})y'(x) + 4y(x) = x$.
   (a) Déterminer les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales de (E).
   (b) On pose $t = \sqrt{x}$ et $z(t) = y(x)$. Montrer que si y est solution de (E) alors z est solution de l'équation différentielle (E') : $\quad z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = t^2$.
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E').
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

2. **(13 pts)** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^\alpha}\,dt$.
   (a) Donner l'ensemble D de définition de I. Calculer $I(0)$.
   (b) Montrer que I est continue sur $[0,1]$.
   (c) Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
   (d) Donner le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ en précisant le domaine sur lequel il est valable.
   (e) En déduire que pour $\alpha \in D$ fixé, la fonction $t \mapsto \ln(1+t)\,t^{-\alpha}$ peut s'écrire comme une série de fonction $S_\alpha(t)$ sur un domaine (en t) que l'on précisera. Montrer que pour $\alpha \in [0,1]$, S_α converge uniformément sur $[0,1]$.
   (f) En déduire que pour $\alpha \in [0,1]$, $I(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n-\alpha+1)}$.
   (g) A l'aide de ce qui précède en déduire une expression de $\int_0^1 I(\alpha)d\alpha$ sous forme de série. En utilisant le Théorème de Fubini, déterminer l'expression de $\int_0^1 I(\alpha)d\alpha$ sous la forme d'une intégrale simple.