

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 – 2012

Analyse S4

Examen final, juin 2012

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(9 points)** Soit l'équation différentielle: $(E) \quad x^2 u''(x) + x \frac{(2-x)}{(x-1)} u'(x) - \frac{(2-x)}{(x-1)} u(x) = -2x^3$.
- (a) Déterminer sur quels intervalles chercher des solutions maximales de (E) **(0.5 pts)**.
- (b) On pose $y(x) = u'(x) - \frac{u(x)}{x}$. Montrer que si u est solution de (E) si et seulement si y est solution de (E') avec

$$(E') \quad y'(x) + \frac{1}{x(x-1)} y(x) = -2x. \quad \textbf{(1.5 pts)}$$

- (c) Déterminer l'ensemble des solutions maximales de (E') **(4 pts)**.
- (d) En déduire l'ensemble des solutions maximales de (E) **(3 pts)**.

2. **(7 points)** Soit la série entière

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2\ln(n)}} x^{3n}.$$

On rappelle que $\ln(2) \simeq 0.69$.

- (a) Déterminer le rayon de convergence de S (on pourra poser $X = x^3$) **(2 pts)**.
- (b) Déterminer exactement le domaine de définition dans \mathbf{R} de S **(2 pts)**.
- (c) Déterminer la dérivée de S et son domaine de définition **(3 pts)**.

3. **(6 points)** Soit l'intégrale

$$I = \int_{\Delta} xy \, dx dy \quad \text{où} \quad \Delta = \{(x, y) \in [0, 1]^2, 0 < 3xy \leq 1 \text{ et } 2x > y^2\}.$$

- (a) Tracer l'ensemble Δ **(2.5 pts)**.
- (b) Calculer I **(3.5 pts)**.