Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 – 2012

Analyse S4

Examen final, juin 2012

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(10 points)** Soit l'équation différentielle: $(E) \quad \cos^2(x)\, y''(x) - 2\, y(x) = 1$.
   (a) Déterminer sur quels intervalles chercher des solutions maximales de (E) **(1 pt)**. Dans la suite, on ne considérera plus que l'intervalle I contenant 0.
   (b) Vérifier que $y_1(x) = \tan(x)$ est une solution de (EH) l'équation homogène liée à (E) (on rappelle que $\tan(x) = \sin(x)\,(\cos(x))^{-1}$) **(1 pt)**.
   (c) Soit $y_2(x) = z(x)y_1(x)$. Montrer que si y_2 est solution de (EH), alors $Z = z'$ est solution de l'équation (E') : $\sin(2x)Z'(x) + 4Z(x) = 0$ **(1 pt)**. Calculer la dérivée de la fonction $\ln(\tan x)$ et en déduire la résolution de (E') **(2 pts)**. En utilisant le changement de variable $u = \tan(x)$, en déduire z puis y_2 **(3 pts)**.
   (d) En déduire l'ensemble des solutions maximales de (EH) sur I **(1 pt)**.
   (e) En déduire l'ensemble des solutions maximales de (E) sur I **(1 pt)**.

2. **(10 points)** Soit la série entière
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}\, x^n.$$
   (a) Déterminer le rayon de convergence de S **(1 pt)**.
   (b) Déterminer exactement le domaine de définition dans $\mathbf{R}$ de S **(2 pts)**.
   (c) Déterminer exactement le domaine de continuité dans $\mathbf{R}$ de S **(2 pts)**.
   (d) Montrer que S est croissante sur $]-1,1[$ **(3 pt)**.
   (e) Soit la fonction $g(x) = \int_0^1 S(x)e^{-xt}dt$. Démontrer que g est continue sur $\mathbf{R}$ **(2 pts)**.

3. **(4 points)** Soit l'intégrale
$$I = \int_{\Delta} x \sin(xy)\, dxdy \qquad \text{où} \qquad \Delta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 < xy \leq \pi \text{ et } 0 < x < 1\}.$$
   (a) Tracer l'ensemble Δ **(1 pt)**.
   (b) Calculer I **(3 pts)**.