Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 – 20010

Analyse S4

Examen final, juin 2010

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(6 pts)** Soit $I = \displaystyle\int_{]0,\infty[^2} \frac{(x-y)dxdy}{(1+\sqrt{x^2+4y^2}\,)^4}$.

   (a) On veut utiliser le changement de variable $x = 2r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. A l'aide d'un dessin, déterminer les ensembles sur lesquels doivent être considérés r et θ pour que ce soit un changement de variable admissible. Déterminer les expressions de r et de θ en fonction de x et y et en déduire que c'était bien un changement de variable admissible.

   (b) Déterminer le Jacobien associé à ce changement de variable.

   (c) Montrer que pour tout $r > 0$, $\displaystyle\frac{r^2}{(1+2r)^4} = \frac{1}{4(1+2r)^2} - \frac{1}{2(1+2r)^3} + \frac{1}{4(1+2r)^4}$.

   (d) En déduire le calcul de I.

2. **(12 pts)** Soit la série entière $S(x) = x + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}\, x^n$. Pour la suite, on rappelle qu'une série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur $I \subset \mathbf{R}$ si $\sum_n \sup_{x\in I} |f_n(x)| < \infty$.

   (a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série.

   (b) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_S$ de S.

   (c) Montrer que S converge normalement donc uniformément sur $\mathcal{D}_S$. En déduire que S est continue sur $\mathcal{D}_S$.

   (d) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R]$.

   (e) Montrer que S' est le développement en série entière d'une fonction que vous préciserez.

   (f) En déduire que S est le développement en série entière d'une fonction que vous préciserez.

   (g) En déduire un développement en série numérique de $\ln 2$. Combien faut-il au maximum de termes pour approcher $\ln 2$ à 10^{-6} près? Combien en aurait-il fallu en utilisant directement le développement en série entière de $\ln(1+x)$?

3. **(10 pts)** Soit l'équation différentielle (E): $x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = x - 1$.

   (a) Sur quels ensembles peut-on chercher des solutions maximales de (E)?

   (b) Montrer que la fonction $y_1(x) = x^3$ est solution de l'équation homogène (EH) associée à (E).

   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (EH).

   (d) Déterminer une solution particulière de (E), puis l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (E).

   (e) On va retrouver ce résultat en utilisant un changement de variable. On pose donc pour $x > 0$, $x = e^t$ et on note $z(t) = y(e^t)$. Déterminer les dérivées de z par rapport à t, et en déduire que l'équation (E) devient l'équation (E'): $z''(t) - 4z'(t) + 3z(t) = e^t - 1$. En déduire la solution générale de (E'), et retrouver ainsi $\mathcal{E}$ quand $x > 0$. Que peut-on faire quand $x < 0$?