Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 – 20010

Analyse S4

Examen final, juin 2010

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(6 pts)** Soit $I = \displaystyle\int_{]0,\infty[^2} \frac{(x-y)dxdy}{(1+\sqrt{x^2+4y^2}\,)^4}$.

   (a) On veut utiliser le changement de variable $x = 2r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. A l'aide d'un dessin, déterminer les ensembles sur lesquels doivent être considérés r et θ pour que ce soit un changement de variable admissible. Déterminer les expressions de r et de θ en fonction de x et y et en déduire que c'était bien un changement de variable admissible.

   (b) Déterminer le Jacobien associé à ce changement de variable.

   (c) Montrer que pour tout $r > 0$, $\dfrac{r^2}{(1+2r)^4} = \dfrac{1}{4(1+2r)^2} - \dfrac{1}{2(1+2r)^3} + \dfrac{1}{4(1+2r)^4}$.

   (d) En déduire le calcul de I.

Proof. (a) On montre que le changement de variable est bijectif: si $(x,y) = \phi(r,\theta) = (2r\cos\theta, r\sin\theta)$, on voit facilement sur un dessin que $r > 0$ et $\theta \in]0,\pi/2[$ permet d'obtenir tout point de $]0,\infty[^2$ **(1pts)**. En effet, en choisissant on a alors $r = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4y^2}$ et $\theta = \text{Artan}(2y/x)$ (à π près) et comme $x > 0$ et $y > 0$ on a bien $\theta \in]0,\pi/2[$. La fonction ϕ^{-1} existe clairement et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[\times]0,\pi/2[$ **(2pts)**.

(b) On a facilement $J = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r$ (qui est toujours strictement positif pour $r > 0$) **(0.5pts)**.

(c) $\dfrac{1}{4(1+2r)^2} - \dfrac{1}{2(1+2r)^3} + \dfrac{1}{4(1+2r)^4} = \dfrac{1}{4(1+2r)^4}\big((1+2r)^2 - 2(1+2r) + 1\big) = \dfrac{r^2}{(1+2r)^4}$ **(0.5pts)**.

(d) On a $I = \displaystyle\int_{]0,\infty[^2} \frac{(x-y)dxdy}{(1+\sqrt{x^2+4y^2}\,)^4} = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} 2r\frac{r(2\cos\theta - \sin\theta)dr\,d\theta}{(1+2r)^4}$, donc d'après le Théorème de Fubini **(0.5pts)**,

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_0^\infty \frac{r^2 dr}{(1+2r)^4}\int_0^{\pi/2}(2\cos\theta - \sin\theta)d\theta \quad \textbf{(0.5pts)}\\
&= \big[2\sin\theta + \cos\theta\big]_0^{\pi/2}\int_0^\infty \Big(\frac{1}{2(1+2r)^2} - \frac{1}{(1+2r)^3} + \frac{1}{2(1+2r)^4}\Big)dr\\
&= (2-1)\Big[-\frac{1}{4(1+2r)} + \frac{1}{4(1+2r)^2} - \frac{1}{12(1+2r)^3}\Big]_0^\infty\\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}\textbf{(1pt)}.
\end{aligned}
$$

□

2. **(12 pts)** Soit la série entière $S(x) = x + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$. Pour la suite, on rappelle qu'une série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur $I \subset \mathbf{R}$ si $\sum_n \sup_{x\in I} |f_n(x)| < \infty$.

(a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série.

(b) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_S$ de S.

(c) Montrer que S converge normalement donc uniformément sur $\mathcal{D}_S$. En déduire que S est continue sur $\mathcal{D}_S$.

(d) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R]$.

(e) Montrer que S' est le développement en série entière d'une fonction que vous préciserez.

(f) En déduire que S est le développement en série entière d'une fonction que vous préciserez.

(g) En déduire un développement en série numérique de $\ln 2$. Combien faut-il au maximum de termes pour approcher $\ln 2$ à 10^{-6} près? Combien en aurait-il fallu en utilisant directement le développement en série entière de $\ln(1+x)$?

Proof. (a) Soit $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$. Avec d'Alembert, on montre facilement que $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ donc $R = 1$ **(0.5pts)**.
(b) D'après le cours, on sait déjà que S existe pour $x \in]-1,1[$ et que S n'existe pas pour $|x| > 1$ **(0.5pts)**. Pour $x = 1$ ou $x = -1$, comme $|a_n| \sim 1/n^2$, et comme $\sum 1/n^2$ converge (série de Riemann) on en déduit d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs que $\sum |a_n|$ convergedonc S existe en 1 et -1. L'ensemble de définition de S est $[-1,1]$ **(1pt)**.
(c) D'après le cours S est continue sur $]-1,1[$ **(0.5pts)**. Il reste à montrer la continuité en 1 et -1. Or S converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$ puisque $\sum_{n=2}^{\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |a_n x^n| = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| < \infty$ (voir question (b)). De plus $x \in [-1,1] \mapsto a_n x^n$ est une fonction continue sur $[-1,1]$. Donc d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, on en déduit que S est continue sur $[-1,1]$ **(1.5pts)**.
(d) Il est clair que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ d'après le cours **(0.5pts)** et $S'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ **(0.5pts)**. Pour $x = 1$, on considère R_n le reste de la suite de fonction S', soit $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$. D'après le critère de convergence des séries à terme alternées, comme la suite (u_n) telle que $u_n = \frac{1}{n} x^n$ est décroissante et positive quand $x \geq 0$, alors $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ donc $\sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ quand $n \to \infty$. On en déduit que S' converge uniformément sur $[0,1]$. Comme $x \in [-1,1] \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ est continue, on en déduit que S' est continue en 1 (d'après le théorème de continuité des séries de fonctions) et ainsi S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, donc sur $]-1,1]$ **(2pts)**.
(e) On sait que pour $x \in]-1,1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Ainsi $S'(x)$ est le DSE de $1 + \ln(1+x)$ pour tout $x \in]-1,1]$ **(0.5pts)**.
(f) D'après le cours, on sait que si une fonction f est développable en série entière $\sum b_n x^n$ sur $]-R,R[$ alors $\sum b_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x f(t)dt$. En conséquence, $S(x) = \int_0^x \big(1+\ln(1+t)\big)dt = x + \big[(1+t)(\ln(1+t)-1)\big]_0^x = (1+x)\ln(1+x)$ **(1.5pts)**.
(g) D'après ce qui précède $S(1) = 2\ln 2 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$, donc $\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ **(0.5pts)**.
Comme la série précédente est à terme alternés, $\left|\ln 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right)\right| \leq \frac{1}{2N(N+1)}$. Donc pour avoir une précision à 10^{-2} près il suffit de calculer au maximum $N = 7$ termes (alors $N(N+1) \geq 10^2/2 = 50$ **(1.5pts)**.
Si on utilise le DSE de $\ln(1+x)$ on a $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et ainsi $\left|\ln 2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{N+1}$ d'après le même raisonnement. Il faudra au maximum 99 termes pour calculer $\ln 2$. On a donc gagné notablement dans la vitesse de convergence de la série **(1pts)**.

□

3. **(10 pts)** Soit l'équation différentielle (E): $x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = x - 1$.

(a) Sur quels ensembles peut-on chercher des solutions maximales de (E)?

(b) Montrer que la fonction $y_1(x) = x^3$ est solution de l'équation homogène (EH) associée à (E).

(c) En déduire l'ensemble des solutions de (EH).

(d) Déterminer une solution particulière de (E), puis l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (E).

(e) On va retrouver ce résultat en utilisant un changement de variable. On pose donc pour $x > 0$, $x = e^t$ et on note $z(t) = y(e^t)$. Déterminer les dérivées de z par rapport à t, et en déduire que l'équation (E) devient l'équation (E'): $z''(t) - 4z'(t) + 3z(t) = e^t - 1$. En déduire la solution générale de (E'), et retrouver ainsi $\mathcal{E}$ quand $x > 0$. Que peut-on faire quand $x < 0$?

Proof. (a) (E) s'écrit $y''(x) - \dfrac{3}{x}\, y'(x) + \dfrac{3}{x^2} y(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. Les fonctions définissant cette équation différentielle linéaire sont continues sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$: c'est donc sur ces deux ensembles que l'on cherchera des solutions maximales à (E) **(0.5pts)**.
(b) L'équation (EH) est $x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = 0$. Or $y_1'(x) = 3x^2$ et $y_1''(x) = 6x$. Donc $x^2 y_1''(x) - 3xy_1'(x) + 3y_1(x) = 6x^3 - 9x^3 + 3x^3 = 0$: y_1 est bien solution de (EH) **(0.5pts)**.
(c) On sait que l'on peut trouver une autre solution y_2 de (EH) en posant $y_2 = zy_1$, soit $y_2(x) = x^3 z(x)$ (on prendra z non constant pour ne pas retomber sur y_1). Alors $y_2'(x) = x^3 z'(x) + 3x^2 z(x)$ et $y_2''(x) = x^3 z''(x) + 6x^2 z'(x) + 6xz(x)$. Donc si y_2 solution de (EH) alors $x^5 z''(x) + 6x^4 z'(x) - 3x^4 z'(x) = 0$ soit encore $xz''(x) + 3z'(x) = 0$. Pour résoudre cette equation on pose $Z = z'$ et on obtient une équation linéaire d'ordre 1: $Z' + \frac{3}{x} Z = 0$, d'où $Z(x) = \frac{k}{x^3}$ avec $k \in \mathbf{R}$; alors $z(x) = \frac{1}{x^2}$ est une solution particulière de $z' = Z$ et ainsi $y_2(x) = x$ est une autre solution particulière de (EH) non liée avec y_1 **(2pts)**.
Par conséquent, comme on sait d'après le cours que celui-ci est un sev de dimension 2 **(0.5pts)**, $\mathcal{H} = \{a\, x^3 + b\, x,\ (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$ est l'ensemble des solutions de (EH) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$ (et même sur $\mathbf{R}$ car ces solutions sont polynomiales donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$) **(0.5pts)**.
(d) On va utiliser la méthode de variations des constantes. On sait que cela revient alors que l'on peut écrire cette solution particulière sous la forme $y_0 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ et on doit résoudre le système:

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(x) \\ \lambda_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 \lambda_1'(x) + \lambda_2'(x) \\ x^3 \lambda_1'(x) + x\lambda_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi que $\lambda_2'(x) = -x^2 \lambda_1'(x)$ et donc $2x^2 \lambda_1'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, soit $\lambda_1(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{6x^3}$ et $\lambda_2(x) = -\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2x}$. Par suite, on en déduit que $y_0(x) = -x + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} x \ln|x| - \frac{1}{2}$, donc $-\frac{1}{2} x \ln|x| - \frac{1}{3}$ est solution particulière de (E) (le $-x$ ne sert à rien) **(2pts)**.
Ainsi $\mathcal{E} = \{-\frac{1}{2} x \ln|x| - \frac{1}{3} + a\, x^3 + b\, x,\ (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$ est la solution générale de (E) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$ **(0.5pts)**.
(e) On a donc $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t)$. Or (E) s'écrit $e^{2t} y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 3y(e^t) = e^t - 1$, d'où $z''(t) - z'(t) - 3z'(t) + 3z(t) = e^t - 1$ ou encore $z''(t) - 4z'(t) + 3z(t) = e^t - 1$ **(0.5pts)**.
Pour résoudre (E') qui est une équation différentielle linéaire à coefficients constants, on commence par résoudre (EH') l'équation homogène associée à qui on fait correspondre l'équation caractéristique $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ soit $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$. L'ensemble des solutions de (EH') est $\mathcal{H}' = \{ae^t + be^{3t},\ (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$ **(0.5pts)**.
Ensuite comme le premier second membre de l'équation est de la forme e^t et comme 1 est déjà racine de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière sera de la forme $P(t)e^t$ avec P polynôme de degré 1. Pour le second second terme (-1), on peut aussi directement écrire qu'une solution sera de la forme c. Aussi peut-on directement chercher une solution particulière sous la forme $z_0(t) = kte^t + c$. On trouve alors $k = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{3}$. Aussi trouve-t-on que $\mathcal{E}' = \{-\frac{1}{2} te^t -_f rac13 + ae^t + be^{3t},\ (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$ **(1.5pts)**.
Pour revenir aux solutions de (E) quand $x > 0$, on remplace t par $\ln x$ et on retrouve bien $\mathcal{E}$ **(0.5pts)**.
Si $x < 0$, on pose plutôt $x = -e^t$ (ou $t = \ln(-x)$). On retrouve les mêmes solutions que précédemment avec $\ln(-x)$ au lieu de $\ln(x)$ **(0.5pts)**.

$\square$