Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2010 – 2011

Analyse S4

Examen final, mai 2011

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(5 pts)** Soit l'équation différentielle: $(E) \quad x^3 y''(x) - 2xy(x) = -3$.
   - (a) Déterminer les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales de (E).
   - (b) On pose $z(x) = xy'(x) + y(x)$. Montrer que si y est solution de (E) alors z est solution de l'équation différentielle (E') : $\quad x^2 z'(x) - 2xz(x) = -3$.
   - (c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E').
   - (d) En déduire l'ensemble des solutions de (E). Existe-il une solution maximale sur $\mathbf{R}$?

2. **(11 pts)** Soit la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^x)dt$.
   - (a) Donner l'ensemble D de définition de f. Calculer $f(0)$.
   - (b) Montrer que f est décroissante sur D, puis que pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x) + x$.
   - (c) Montrer que f est continue sur $[0, \infty[$, puis que f est continue sur $\mathbf{R}$.
   - (d) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   - (e) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et exprimer $f'(x)$. Calculer $f'(0)$. Tracer f.

3. **(14 pts)** Le but de cet exercice est de proposer une valeur approchée de $\sqrt{2}$. Pour ce faire, on considère la série entière $S(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n \, x^{n+1}$ avec $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}(n+1)\,(n!)^2}$ pour $n \in \mathbf{N}$.
   - (a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série.
   - (b) Montrer que pour $|x| < R$, $S(x) = \sqrt{1+x}$.
   - (c) Montrer que (u_n) est une suite décroissante. Montrer que $\ln(u_n) = -\ln(2n+2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\big(\frac{2k-1}{2k}\big)$ pour $n \in \mathbf{N}$, puis que (u_n) converge vers 0. En déduire que $S(1)$ existe.
   - (d) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $0 \leq x \leq 1$, on note $R_{n+1}(x) = S(x) - 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k x^{k+1}$. Montrer que $0 \leq R_{2n}(x) \leq u_{2n} x^{2n+2}$ et $-u_{2n+1} x^{2n+3} \leq R_{2n+1}(x) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En déduire que $|R_n(x)| \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $0 \leq x \leq 1$.
   - (e) En déduire que S est continue sur $]-1, 1]$ (penser à la convergence uniforme...) et donner une expression de $\sqrt{2}$ sous la forme d'une série.
   - (f) Montrer que S est dérivable sur $]-1, 1]$.
   - (g) Montrer que $|\sqrt{2} - 1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k| \leq u_{n+1}$. En déduire que $\sqrt{2} \simeq \frac{179}{128}$ à u_4-près (et $u_4 \simeq 0.027$).