Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2010 – 2011

Analyse S4

Examen final, mai 2011

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(5 pts)** Soit l'équation différentielle: $(E) \quad x^3y''(x) - 2xy(x) = -3$.
   (a) Déterminer les intervalles sur lesquels chercher des solutions maximales de (E).
   (b) On pose $z(x) = xy'(x) + y(x)$. Montrer que si y est solution de (E) alors z est solution de l'équation différentielle (E') : $\quad x^2z'(x) - 2xz(x) = -3$.
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E').
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de (E). Existe-il une solution maximale sur $\mathbf{R}$?

Proof. (a) On a $(E) \quad y''(x) - 2x^{-2}y(x) = -3x^{-3}$, donc on peut chercher des solutions maximales sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$ car les fonctions x^{-2} et x^{-3} sont continues sur ces ensembles **(0.5pts)**.
(b) on a $z'(x) = 2y'(x) + xy''(x)$, donc $x^2z'(x) - 2xz(x) = x^3y''(x) + 2x^2y'(x) - 2x^2y'(x) - xy(x) = x^3y''(x) - xy(x)$ et ainsi (y est solution de (E)) $\iff$ (z solution de $x^2z'(x) - 2xz(x) = -3$) **(1pt)**.
(c) On résoud d'abord l'équation homogène associée à (E') soit $x^2z'(x) - 2xz(x) = 0$ donc en travaillant sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$, on a $z'(x) - 2x^{-1}z(x) = 0$ soit $z(x) = \lambda \exp(2\ln(x)) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$ **(0.5pts)**. On résoud (E') avec la méthode de la variation des constantes et on a $z(x) = \lambda(x)x^2$, d'où $x^4\lambda'(x) = -3$, soit $\lambda(x) = x^{-3} + C$ et ainsi la solution générale de (E') est: $\lambda x^2 + x^{-1}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$ **(1pt)**.
(d) On doit maintenant résoudre $(E'') \quad xy'(x) + y(x) = \lambda x^2 + x^{-1}$. On commence par résoudre l'équation homogène associée, soit $xy'(x) + y(x) = 0$, soit $y(x) = \mu x^{-1}$ avec $\mu \in \mathbf{R}$ **(0.5pts)**. Ensuite, avec la méthode de la variation des constantes on a $y(x) = \mu(x)x^{-1}$ soit, en réinjectant dans (E''), $\mu'(x) = \lambda x^2 + x^{-1}$, d'où $\mu(x) = \alpha x^3 + \ln(x) + C$. Ainsi la solution générale de (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$ est $y(x) = \alpha x^2 + \frac{\ln(x)}{x} + \mu x^{-1}$, avec α et μ dans $\mathbf{R}$ **(1pt)**.
Il n'existe pas de solution maximale sur $\mathbf{R}$ car $\frac{\ln(x)}{x}$ n'est pas définie en 0 **(0.5pts)**.

$\square$

2. **(11 pts)** Soit la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + t^x)dt$.
   (a) Donner l'ensemble D de définition de f. Calculer $f(0)$.
   (b) Montrer que f est décroissante sur D, puis que pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x) + x$.
   (c) Montrer que f est continue sur $[0, \infty[$, puis que f est continue sur $\mathbf{R}$.
   (d) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (e) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et exprimer $f'(x)$. Calculer $f'(0)$. Tracer f.

Proof. (a) Pour $x \geq 0$, f s'écrit comme une intégrale définie donc f existe. Pour $x < 0$, Il y a un problème de convergence en 0 car $1 + t^x \to +\infty$. Mais pour $x < 0$ et $t \in]0, 1]$, $1 < 1 + t^x \leq 2t^x$ donc $0 \leq \ln(1 + t^x) \leq \ln 2 + x \ln t$. Mais $\int_0^1 \ln t dt = \big[t(\ln t - 1)\big]_0^1 = -1$, intégrale convergente, donc d'après le Théorème de Comparaison, f existe. En conséquence, f existe sur $D = \mathbf{R}$ **(1.5pts)**.
$f(0) = \ln 2$ **(0.5pts)**.
(b) On a pour $x < x'$ et $t \in]0, 1[$, $t^x = e^{x \ln t} > e^{x' \ln t} = t^{x'}$ donc comme la fonction logarithme est croissante, $\ln(1 + t^x) \geq \ln(1 + t^{x'})$ et ainsi $f(x) \geq f(x')$: la fonction f est décroissante **(0.5pts)**.

Pour $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \int_0^1 \big(\ln(t^x) + \ln(1+t^{-x})\big)dx = x\int_0^1 \ln t dt + f(-x) = -x + f(-x)$ **(1pt)**.
(c) Pour $x \geq 0$, on a $(x,t) \to \ln(1+t^x)$ qui est une fonction continue sur $[0,\infty[\times[0,1]$. De plus, $0 \leq \ln(1+t^x) \leq \ln 2$ et $\int_0^1 \ln 2 dt < \infty$. Donc d'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, $x \in [0,\infty[\to f(x)$ est continue sur $[0,\infty[$ **(1pt)**.
Par ailleurs, $f(-x) = f(x) + x$ pour $x \in \mathbf{R}$, donc si f est continue sur $[0,\infty[$ elle aussi continue sur $]-\infty,0]$ car la fonction x est également continue. Donc f continue sur $\mathbf{R}$ **(0.5pts)**.
(d) Soit la suite de fonctions $g_n(t) = \ln(1+t^n)$. Il est clair que sur $[0,1]$ la suite de fonctions converge simplement vers $g(t) = 0$ si $t \in [0,1[$ et $g(1) = \ln 2$. De plus, la suite (g_n) est décroissante. Donc d'après le Théorème de convergence monotone, $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)dt = \int_0^1 g(t)dt = 0$ **(1.5pts)**. Enfin, comme $0 \leq f(x) \leq f([x])$ car f est décroissante et comme $\lim_{x\to\infty} f([x]) = 0$ d'après ce qui précède, alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ **(1pt)**.
Comme $f(-x) = f(x) + x$, si $x \to \infty$ donc $-x \to -\infty$, alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ **(0.5pts)**.
(e) On a $(x,t) \to h(x,t) = \ln(1+t^x)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\infty[\times[0,1]$. De plus $\frac{\partial h}{\partial x}h(x,t) = \frac{t^x}{1+t^x}\ln t$ qui vérifie $\left|\frac{\partial h}{\partial x}h(x,t)\right| \leq -\ln t$ pour tout $(x,t) \in [0,\infty[\times[0,1]$ et $\int_0^1 -\ln t dt < \infty$. Donc d'après le Théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\infty[$ **(1.5pts)**. Comme $f(-x) = f(x) + x$ pour $x \in \mathbf{R}$ et x est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ **(0.5pts)**.
$-f'(0) = f'(0) + 1$ car $-f'(-x) = f'(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, donc $f'(0) = -1/2$ **(0.5pts)**. Tracé **(0.5pts)**.

□

3. **(14 pts)** Le but de cet exercice est de proposer une valeur approchée de $\sqrt{2}$. Pour ce faire, on considère la série entière $S(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n\, x^{n+1}$ avec $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}(n+1)\,(n!)^2}$ pour $n \in \mathbf{N}$.

   (a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série.

   (b) Montrer que pour $|x| < R$, $S(x) = \sqrt{1+x}$.

   (c) Montrer que (u_n) est une suite décroissante. Montrer que $\ln(u_n) = -\ln(2n+2) + \sum_{k=1}^{n} \ln\big(\dfrac{2k-1}{2k}\big)$ pour $n \in \mathbf{N}$, puis que (u_n) converge vers 0. En déduire que $S(1)$ existe.

   (d) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $0 \leq x \leq 1$, on note $R_{n+1}(x) = S(x) - 1 - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k x^{k+1}$. Montrer que $0 \leq R_{2n}(x) \leq u_{2n}x^{2n+2}$ et $-u_{2n+1}x^{2n+3} \leq R_{2n+1}(x) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En déduire que $|R_n(x)| \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $0 \leq x \leq 1$.

   (e) En déduire que S est continue sur $]-1,1]$ (penser à la convergence uniforme...) et donner une expression de $\sqrt{2}$ sous la forme d'une série.

   (f) Montrer que S est dérivable sur $]-1,1]$.

   (g) Montrer que $|\sqrt{2}-1-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k| \leq u_{n+1}$. En déduire que $\sqrt{2} \simeq \frac{179}{128}$ à u_4-près (et $u_4 \simeq 0.027$).

Proof. (a) On utilise d'Alembert car $|u_{n+1}/u_n| = (2n+1)/(2n+4) \to 1$, donc $R = 1$ **(0.5pts)**.
(b) On a $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})\times\cdots(-\frac{2n-3}{2})\Big)\frac{x^n}{n!}$ pour $|x| < 1$ d'après le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ et $\alpha = 1/2$. Mais $\Big(\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})\times\cdots\times(-\frac{2n-3}{2})\Big) = \frac{(-1)^{n+1}(2n-2)!}{2^n 2\times 4\times(2n-2)} = \frac{(-1)^{n+1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}$.
On en déduit donc que $S(x) = \sqrt{1+x}$ pour $|x| < 1$ **(1pt)**.
(c) Comme $0 < u_{n+1}/u_n = (2n+1)/(2n+4) < 1$ pour tout n, on en déduit que (u_n) est décroissante **(0.5pts)**.
En reprenant la formule précédente, $\ln|u_n| = \ln\Big(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2}\Big) - \ln((n+1)!) = \ln\Big(\frac{1}{2\times 1}\times\frac{1}{2\times 2}\times\frac{3}{2\times 3}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\Big) - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n}\ln\big(\frac{2k-1}{2k}\big) - \ln(2n+2)$ **(1pt)**.
Quand $n\to\infty$, $\ln\big(\frac{2k-1}{2k}\big) \sim -\frac{1}{2k}$ et comme $\sum\frac{1}{2k}$ diverge (série de Riemann), on a $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\big(\frac{2k-1}{2k}\big) = -\infty$ d'où $\lim_{n\to\infty}\ln(u_n) = -\infty$ **(1pt)**. On en déduit donc que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ **(0.5pts)**.
Ainsi, (u_n) est une suite décroissante et tendant vers 0 donc d'après le Théorème de convergence des séries alternées, $\sum(-1)^n u_n$ converge, ce qui signifie que $S(1)$ existe **(0.5pts)**.
(d) On a $R_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k u_k x^{k+1}$ et on peut donc écrire que $R_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}\big((u_{n+1}x^{n+2} - u_{n+2}x^{n+3}) + (u_{n+3}x^{n+4} - u_{n+4}x^{n+5}) + \cdots\big)$. Comme la suite $(u_k x^{k+1})_k$ est une suite positive décroissante (car $0 \leq x \leq 1$), d'une manière générale $(u_{n+1}x^{n+2} - u_{n+2}x^{n+3}) \geq 0$, donc $\big((u_{n+1}x^{n+2} - u_{n+2}x^{n+3}) + (u_{n+3}x^{n+4} - u_{n+4}x^{n+5}) + \cdots\big) \geq 0$ et ainsi $R_{2n} \geq 0$ et $R_{2n+1} \leq 0$ **(1.5pts)**. De plus, $R_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}u_{n+1}x^{n+2} + (-1)^{n+2}\big((u_{n+2}x^{n+3} - u_{n+3}x^{n+4}) + (u_{n+4}x^{n+5} - u_{n+5}x^{n+6}) + \cdots\big)$ et $\big((u_{n+2}x^{n+3} - u_{n+3}x^{n+4}) + (u_{n+4}x^{n+5} - u_{n+5}x^{n+6}) + \cdots\big) \geq 0$. Donc $R_{2n}(x) - u_{2n}x^{2n+1} \leq 0$, soit $R_{2n}(x) \leq u_{2n}x^{2n+1}$ et $R_{2n+1}(x) + u_{2n+1}x^{2n+2} \geq 0$, soit $R_{2n+1}(x) \geq -u_{2n+1}x^{2n+2}$ **(1.5pts)**.
De ces deux inégalités on a bien $|R_n(x)| \leq u_n x^{n+1}$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $|R_n(x)| \leq u_n$ **(0.5pts)**.
(e) Pour montrer que S est continue sur $[0,1]$ il suffit de montrer que S converge uniformément sur $[0,1]$ car $x \to (-1)^n u_n x^{n+1}$ est une fonction continue. Mais $\sup_{x\in[0,1]}|R_n(x)| \leq u_n$ et $u_n \to 0$, donc S converge bien uniformément

sur $[0,1]$ et ainsi S est continue sur $[0,1]$ **(1pt)**. De plus, S est continue sur son disque ouvert de convergence, donc S continue sur $]-1,1]$ **(0.5pts)**.
On a donc, par continuité, $S(x) = \sqrt{1+x}$ pour $x \in]-1,1]$ et ainsi pour $x=1$, $\sqrt{2} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ **(0.5pts)**.
(f) Il est clair que S est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-1,1[$ car S est une série entière et son rayon de convergence est 1. Considérons $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)u_n x^n$ pour $x \in]-1,1[$ et montrons que cette expression existe et est continue en 1. Posons $v_n = (n+1)u_n$. Alors $v_{n+1}/v_n = \frac{(2n+)(n+1)}{n(2n+4)} \sim 1 - \frac{1}{2n} < 1$. Comme précédemment, on en déduit que (v_n) est décroissante, que $\log(v_n) \sim \sum_{k=1}^{n} \ln(1-\frac{1}{2k}) \to -\infty$ donc $u_n \to 0$ et ainsi d'après le Théorème des séries alternées, que $\sum(-1)^n v_n = S'(1)$ existe. Comme précédemment, la série converge uniformément sur $[0,1]$, donc S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,,1]$ **(2.5pts)**.
(g) D'après la question (d), on a $|R_{n+1}(1)| \leq u_{n+1}$ soit $|S(1) - 1 - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k| \leq u_{n+1}$ pour tout n, avec $S(1) = \sqrt{2}$ **(0.5pts)**.
Pour $n=3$ on reprend la formule ci-dessus, avec donc $1+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} = \frac{179}{128}$ et $u_4 = \frac{35}{1280} \simeq 0.027$ **(0.5pts)**.

□