Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 – 2012

Analyse S4

Examen final, mai 2012

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(8 points)** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ l'équation différentielle: $(E) \quad y''(x) - 2\,y'(x) + (2-\alpha^2)y(x) = e^x$.
   (a) Déterminer sur quels intervalles chercher des solutions maximales de (E) **(0.5 pts)**.
   (b) Suivant les valeurs prises par α déterminer l'ensemble des solutions réelles de (E) **(5.5 pts)**.
   (c) Si on suppose que $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$, quelles sont les valeurs possibles de α **(1 pt)** et quelles sont alors les solutions maximales de (E) **(1 pt)**?

2. **(19 points)** Pour $x \in \mathbf{R}$, on considère
$$F(x) = \int_0^\infty t^x\, e^{-t^2/2}\, dt.$$
   (a) Montrer que F diverge pour $x \leq -1$ **(1 pt)** et F converge pour $x > -1$ **(1 pt)**.
   (b) Calculer explicitement $F(1)$ **(1 pt)**.
   (c) Montrer que pour $x > 0$, $F(x+1) = x\,F(x-1)$ **(1.5 pts)**.
   (d) Montrer que pour tout $-1 < a \leq b$, F est continue sur $[a,b]$ **(2.5 pts)**. En déduire l'ensemble de continuité de F **(0.5 pts)**.
   (e) A l'aide des questions précédentes, déterminer un équivalent de F en -1^+ et en déduire la limite de F en -1^+ **(1.5 pts)**.
   (f) A l'aide de la question (c) montrer également que $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$ **(2 pts)**.
   (g) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,\infty[$ **(2.5 pts)** et donner l'expression de $F'(x)$ **(0.5 pts)**.
   (h) Après avoir rapidement justifié de son existence, déterminer le signe de $F''(x)$ **(1 pt)**. De ce qui précède, déduire que F' s'annule une fois sur $]-1,\infty[$ en x_0 **(1.5 pts)** et grâce à la question (c) montrer que $x_0 \in]0,2[$ **(1.5 pts)**. En déduire le tableau de variations de F **(0.5 pts)** et faire un tracé sommaire de cette fonction **(0.5 pts)**.