Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 – 2012

Analyse S4

Correction de l'examen final, mai 2012

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(8 points)** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ l'équation différentielle: $(E) \quad y''(x) - 2\,y'(x) + (2-\alpha^2)y(x) = e^x$.
   (a) Déterminer sur quels intervalles chercher des solutions maximales de (E) **(0.5 pts)**.
   (b) Suivant les valeurs prises par α déterminer l'ensemble des solutions réelles de (E) **(5.5 pts)**.
   (c) Si on suppose que $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$, quelles sont les valeurs possibles de α **(1 pt)** et quelles sont alors les solutions maximales de (E) **(1 pt)**?

Proof. (a) On cherche les solutions maximales sur $\mathbf{R}$ car les fonctions intervenant dans (E) sont continues sur $\mathbf{R}$.
(b) On associe à (E) son équation homogène $(EH) \quad y''(x) - 2\,y'(x) + (2-\alpha^2)y(x) = 0$ que l'on résout à partir de son équation caractéristique $x^2 - 2x + (2-\alpha^2) = 0$. Cette équation admet pour solutions:
• si $|\alpha| > 1$ deux solutions réelles $x_1 = 1 + \sqrt{\alpha^2-1}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{\alpha^2-1}$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (EH) est $\big\{\lambda_1 e^{x_1 x} + \lambda_2 e^{x_2 x},\, (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2\big\}$.
• si $\alpha = \pm 1$, une solution réelle $x_0 = 1$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (EH) est $\big\{(\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x,\, (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2\big\}$.
• si $|\alpha| < 1$ deux solutions complexes conjuguées $z_1 = 1 + i\sqrt{1-\alpha^2}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{1-\alpha^2}$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (EH) est $\Big\{\big(\lambda_1 \cos(x\sqrt{1-\alpha^2}) + \lambda_2 \sin(x\sqrt{1-\alpha^2})\big)e^x,\, (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2\Big\}$.
Si $\alpha \neq \pm 1$, on peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_0(x) = ce^x$ avec $c \in \mathbf{R}$. En reprenant l'équation, on en déduit que $(1-\alpha^2) = 1$ donc $y_0(x) = (1-\alpha^2)^{-1}e^x$.
Si $\alpha = \pm 1$, on peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_0(x) = cx^2e^x$ et on obtient $2c = 1$, donc $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$. Ainsi l'ensemble des solutions de (E) s'écrit sous la forme:
• si $|\alpha| > 1$, $\mathcal{E} = \big\{\lambda_1 e^{x_1 x} + \lambda_2 e^{x_2 x} + (1-\alpha^2)^{-1}e^x,\, (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2\big\}$.
• si $\alpha = \pm 1$, $\mathcal{E} = \big\{(\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x,\, (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2\big\}$.
• si $|\alpha| < 1$, $\mathcal{E} = \Big\{\big(\lambda_1 \cos(x\sqrt{1-\alpha^2}) + \lambda_2 \sin(x\sqrt{1-\alpha^2})\big)e^x + (1-\alpha^2)^{-1}e^x,\, (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2\Big\}$.
(c) Si on reprend l'équation (E) pour $x = 0$ on en arrive à $1 - 2 + (2-\alpha^2) = 1$, donc $\alpha^2 = 0$ soit $\alpha = 0$. Les solutions de (E) appartiennent alors à $\mathcal{E} = \Big\{\big(\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + 1\big)e^x,\, (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2\Big\}$, mais avec les conditions initiales proposées, on a $\lambda_1 + 1 = 1$, $\lambda_1 + 1 + \lambda_2 + 0 = 1$, donc l'unique solution $y(x) = e^x$ pour $x \in \mathbf{R}$.

$\square$

2. **(19 points)** Pour $x \in \mathbf{R}$, on considère

$$F(x) = \int_0^\infty t^x\, e^{-t^2/2}\, dt.$$

   (a) Montrer que F diverge pour $x \leq -1$ **(1 pt)** et F converge pour $x > -1$ **(1 pt)**.
   (b) Calculer explicitement $F(1)$ **(1 pt)**.
   (c) Montrer que pour $x > 0$, $F(x+1) = x\,F(x-1)$ **(1.5 pts)**.
   (d) Montrer que pour tout $-1 < a \leq b$, F est continue sur $[a,b]$ **(2.5 pts)**. En déduire l'ensemble de continuité de F **(0.5 pts)**.
   (e) A l'aide des questions précédentes, déterminer un équivalent de F en -1^+ et en déduire la limite de F en -1^+ **(1.5 pts)**.

(f) A l'aide de la question (c) montrer également que $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$ **(2 pts)**.

(g) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,\infty[$ **(2.5 pts)** et donner l'expression de $F'(x)$ **(0.5 pts)**.

(h) Après avoir rapidement justifié de son existence, déterminer le signe de $F''(x)$ **(1 pt)**. De ce qui précède, déduire que F' s'annule une fois sur $]-1,\infty[$ en x_0 **(1.5 pts)** et grâce à la question (c) montrer que $x_0 \in]0,2[$ **(1.5 pts)**. En déduire le tableau de variations de F **(0.5 pts)** et faire un tracé sommaire de cette fonction **(0.5 pts)**.

Proof. (a) Pour $x \le -1$, on a en 0, $t^x\, e^{-t^2/2} \sim t^x$ et comme $\int_0^1 t^x dt$ diverge (intégrale de Riemann) d'après le Théorème de comparaison des intégrales, $\int_0^1 t^x\, e^{-t^2/2}dt$ diverge, donc F n'existe pas.
Pour $x > -1$, pour les mêmes raisons, $\int_0^1 t^x\, e^{-t^2/2}dt$ converge. De plus, quand $t \to +\infty$, $t^2 t^x\, e^{-t^2/2} \to 0$ donc d'après le Théorème de comparaison des intégrales $\int_1^\infty t^x\, e^{-t^2/2}dt$ converge. On en déduit que F existe si $x > -1$.
(b) $F(1) = \int_0^\infty te^{-t^2/2}dt = \big[-e^{-t^2/2}\big]_0^i nfty = 1$.
(c) Pour $x > 0$, $F(x+1) = \int_0^\infty t^x te^{-t^2/2}dt = \big[-t^x e^{-t^2/2}\big]_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t^2/2}dt$ par IPP, soit $F(x+1) = x\,F(x-1)$.
(d) En premier lieu, $(x,t) \mapsto t^x e^{-t^2/2}$ est continue sur $[a,b]\times]0,\infty[$. Pour $a > -1$, et $x \ge a$, on a $t^x \le t^a$ pour tout $t \in]0,1]$ et $t^x \le t^b$ pour tout $t \in [1,\infty[$. On en déduit que $t^x e^{-t^2/2} \le (t^a + t^b)e^{-t^2/2} = g_0(t)$ pour tout $t \in]0,\infty[$ et tout $x \in [a,b]$. Comme $\int_0^\infty g_0(t)dt = F(a) + F(b)$ converge, d'après le Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, on en déduit que F est continue sur $[a,b]$.
Comme on peut choisir tout $a > -1$ et tout $b \ge a$, on en déduit que F est continue sur $]-1,\infty[$.
(e) On a pour $x > -1$, $F(x) \sim F(x+2)(1+x)^{-1}$ d'après (c). Or, comme F est continue sur $]-1,\infty[$, ¡quand $x \to -1^+$ alors $F(x+2) \to F(1) = 1$. Donc $F(x) \sim (1+x)^{-1}$ pour $x \to -1^+$.
(f) Soit $x > 0$, qui tend vers $+\infty$. D'après (c), on a par itération $F(x) = (x-1)(x-3)(x-5)\times\cdots\times(x-(2n-1))F(x-2n)$ avec $x - 2n \in [0,2[$. Comme F est continue sur $]-1,\infty[$ donc sur $[0,2]$ et comme $F > 0$, il est clair que $F(x) > c$ avec $c > 0$. De plus pour tout $(x-1)(x-3)(x-5)\times\cdots\times(x-(2n-1)) \to \infty$ quand $x \to \infty$. En conséquence $F(x) \to \infty$ quand $x \to \infty$.
(g) Si $f(x,t) = t^x e^{-t^2/2}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,\infty[\times]0,\infty[$. De plus on a montré que $|f| \le g_0$ sur $[a,b]\times]0,\infty[$. Enfin, $\frac{\partial f}{\partial x}f(x,t) = \ln(t)t^x e^{-t^2/2}$, et comme précédemment on montre que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}f(x,t)\right| \le |\ln(t)|(t^a e^{-t^2/2} + t^b e^{-t^2/2}) = g_1(t)$ sur $[a,b]\times]0,\infty[$. Il est clair que $\int_0^\infty g_1(t)dt$ converge car $g(t) \sim |\ln(t)|(t^a + t^b)$ quand $t \to 0$ et $\int_0^1 \ln t t^x dt$ converge pour $x > -1$ (intégrale de Bertrand) et $t^2 g(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. Donc d'après le Théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et comme précédemment, cela signifie que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,\infty[$.
On en déduit que $F'(x) = \int_0^\infty \ln(t)t^x e^{-t^2/2}dt$.
(h) Comme précédemment, on montre que F est de classe $\mathcal{C}^\in$ sur $[a,b]$ pour tout $-1 < a \le b$, donc sur $]-1,\infty[$ et $F''(x) = \int_0^\infty \ln^2(t)t^x e^{-t^2/2}dt$. De cette formule on en déduit que F'' est positive strictement sur $]-1,\infty[$, donc F' est croissante sur $]-1,\infty[$.
De plus $\lim F(x) = \infty$ quand $x \to -1^+$ et $F(1)1$. Cela signifie que F décroît forcément sur un intervalle inclus dans $]-1,1]$, donc F' est négative sur cet intervalle. De même, $F(1) = 1$ et $F(x) \to +\infty$ quand $x \to \infty$, donc F est forcément croissante sur un intervalle inclus dans $[1,\infty[$ et F' est positive sur cet intervalle. Comme F' est croissante, on en déduit que F' s'annule exactement une fois en $x_0 \in]-1,\infty[$ (Théorème de Roll), $F'(x) < 0$ pour $x \in]-1,x_0[$ et $F'(x) > 0$ pour $x > x_0$.
D'après (c), on a $F(2) = F(0)$ et comme F n'est pas constante, F est strictement décroissante en 0 puis strictement croissante en 2: $x_0 \in]0,2[$. $\square$