Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2012 – 2013

Analyse S4

Examen final, avril 2013

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(12 points)** Soit l'équation différentielle: $(E) \quad xy''(x) + 2\,y'(x) + xy(x) = -3x$.
   (a) Déterminer sur quels intervalles chercher des solutions maximales de (E) **(0.5 pts)**.
   (b) On considère l'équation homogène (EH) associée à (E). On recherche une solution de (EH) sous forme de série entière. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$, avec $R > 0$ inconnu. Ecrire $S'(x)$ et $S''(x)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, où b_n dépend de (a_n) **(1 pt)**. Montrer que S est solution de (EH) si et seulement si $a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_1 = 0$ **(2 pts)**.
   (c) En déduire qu'une solution de (EH) est constituée par la fonctions $S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$ **(2 pts)**. Déterminer R pour S_1 **(1 pt)**, et une expression sans série de cette fonction (utiliser un développement en série entière connu) **(1.5 pts)**.
   (d) Montrer que $S_2(x) = \cos(x)/x$ est solution de (EH) **(0.5 pts)**. En déduire l'ensemble des solutions maximales de (EH) **(1.5 pts)**.
   (e) Déterminer une solution particulière évidente de (E) **(0.5 pts)** et en déduire l'ensemble des solutions maximales de (E) **(0.5 pts)**. Existe-t-il des solutions maximales sur $\mathbf{R}$? **(1 pt)**

2. **(17 points)** Pour $x \in \mathbf{R}$, on considère
$$F(x) = \int_1^{\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2}\,dt.$$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F **(1.5 pts)**. Montrer que F est positive et paire sur $\mathcal{D}_F$ **(0.5 pts)**. Calculer $F(0)$ **(1 pt)**.
   (b) Démontrer que F est continue sur $\mathcal{D}_F$ **(1.5 pts)**.
   (c) Soit $a > 0$. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble $[-a, a]$ **(1.5 pts)**. En déduire sur quel ensemble F est de classe $\mathcal{C}^1$ **(0.5 pts)**. Donner le tableau de variations de F **(0.5 pts)**.
   (d) Soit la fonction $g(x) = \mathrm{Arctan}(x)$. Donner le tableau de variations avec limites de g **(0.5 pts)**. Donner un développement en série entière de g (utiliser sa dérivée...) en précisant son ensemble de validité **(1.5 pts)**. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $g(x) \leq x$ **(1 pt)**.
   (e) En utilisant le changement de variable $u = x/t$ et une intégration par partie, montrer que $F(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{Arctan}(u)}{u}\,du$ pour $x > 0$ **(2 pts)**. En découpant le domaine d'intégration de cette intégrale sur $[0, 1]$ et $[1, \infty[$, en déduire que pour $x \geq 1$, $F(x) \leq \dfrac{\pi}{2x}\big(\ln(x) + \dfrac{2}{\pi}\big)$ **(2 pts)**.
   (f) Faire un tracé sommaire de la courbe représentative de F **(0.5 pts)**.
   (g) Soit $I = \displaystyle\int_0^1 x\,F(x)dx$. Dire pourquoi I existe **(0.5 pts)**. En utilisant le Théorème de Fubini et l'expression de F donnée en 2.(e), montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)}{u}\,\mathrm{Arctan}(u)\,du$ **(2 pts)**.